$$2 \cdot 2\left(\frac{6}{2!\,4!} + \frac{7}{2!\,5!} + \frac{7}{3!\,4!} + \frac{8}{3!\,5!}\right) + 2$$

$$\frac{6! \cdot 2}{5!} = 12$$

ajedrez y matemáticas

Bonsdorff · Fabel · Riihimaa

$$\frac{6! \cdot 4 \cdot 2}{4} = 240$$

$$2 + 3 + 18 + 12 + 36 + 6 + 12 = 89$$

$$2\sqrt{2} \approx 5{,}83$$

$$5 + 2\sqrt{2} \approx 7{,}83$$

$$y7(x+1+x-1)7$$

8				196	127	0		x
7			69	76	51	0		
6		14	25	30	21	0		
5	1	4	9	12	9	0		
4		1	3	5	4	0		
3			1	2	2	0		
2				1	1	0		
1					0			
	TD	CD	AD	D	R	AR	CR	TR

COLECCION ESCAQUES

BONSDORFF - FABEL - RIIHIMAA

AJEDREZ Y MATEMATICAS

La vinculación de las matemáticas con el ajedrez ha sido materia de estudio durante largo tiempo. A partir de elementales y fantasiosos temas —como el de los granos de trigo que debían reunirse sobre el tablero para recompensar al legendario inventor de este juego—, el ajedrez ha recorrido un largo camino llevando, como inseparable compañera, a la ciencia de los números exactos, de la resolución concreta.

En este ámbito, uno de los últimos vínculos lo constituyen las computadoras. Las quiméricas partidas del hombre contra el cerebro electrónico ya han tomado forma: tras su programación, estas máquinas son capaces de resolver los clásicos problemas del ajedrez con una rapidez y exactitud sorprendentes.

En esta obra, los autores han emprendido la labor de plasmar, a través de sus conocimientos en ambas materias, aquellos niveles en donde el ajedrez y las matemáticas parecen unirse con mayor fuerza.

La copiosa cantidad de datos, en muchas ocasiones sorprendentes, hacen de este libro una nueva perspectiva que permite el acceso a unas realidades de las que el ajedrecista no puede prescindir.

Cubierta de Geest/Hoverstad

AJEDREZ Y MATEMATICAS

E. Bonsdorff, K. Fabel y O. Riihimaa

AJEDREZ Y MATEMATICAS

COLECCION ESCAQUES

EDICIONES MARTINEZ ROCA
BARCELONA

Título original: *Schach und Zahl*
Traducido del alemán por AGUSTÍN PUIG
Revisión técnica de JOSÉ LUIS BRASERO

Avda. José Antonio, 774-7.º - Barcelona-13
ISBN 84-270-0248-3
Depósito legal: V. 1.638.—1974
Tipografía Artística Puertes, S. A. - Palleter, 47 - Valencia-8

INDICE

PROLOGO

Entre el juego de ajedrez y la ciencia que trata de las cantidades existen diversos puntos de relación que empiezan por la leyenda de los granos de trigo que habían de ser reunidos en un tablero de ajedrez para recompensar al inventor de este juego y prosiguen con el conocido problema de las ocho damas, el cálculo de probabilidad sobre el resultado de los torneos, el uso de las calculadoras electrónicas para resolver problemas, y así sucesivamente. Estas cuestiones y otras por el estilo forman el presente trabajo en equipo de sus tres autores; trabajo que no exige un amplio conocimiento de las matemáticas al lector.

Los tres capítulos primeros se refieren a la apertura; luego se hace una serie de consideraciones generales sobre la movilidad, el desplazamiento y las coordinaciones que pueden formarse con las piezas; después siguen tres capítulos dedicados al tema matemático de los problemas estrictamente de posición, y, finalmente, se tocan otros asuntos de importancia general. En la última página se explica el valor de algunas expresiones.

Los autores confían haber aportado su grano de arena a este arte, y puede que hayan logrado despertar el interés por este tema en aquellos aficionados al ajedrez que han venido desestimándolo por temor al cálculo matemático.

Agradecen sinceramente al matemático Cristóbal Bandelow, de Munich, sus aportaciones a este libro, como revisión de la mayor parte de capítulos y renovación de algunos textos finlandeses; al editor el apoyo que les ha prestado en publicarlo, y a la imprenta el arduo trabajo que le ha causado componerlo.

Eero Bonsdorff
Dr. Karl Fabel
Olavi Riihimaa

LA APERTURA

Indeciso, el principiante se sienta al tablero y medita sobre sus dieciséis piezas: ¿con qué movimiento empezar, y cómo responderá el contrario?

Si el número de aperturas usadas en el juego práctico es grande, el de todas las posibles, teóricamente, es incomparablemente mayor, y continúa siéndolo aun cuando se consideren sólo las diferentes posiciones y no se valoren las transposiciones ni las variaciones en las series de movimientos. El primer movimiento de las blancas puede dar 20 posiciones distintas, a saber: 16 con un peón y 4 con un caballo. Y el primero de las negras da otro tanto; por consiguiente, se tendrán $20 \times 20 = 400$ posibilidades de formar una posición con las dos primeras jugadas.

Sin duda, el principiante advertirá pronto que es aconsejable atenerse poco a esta clase de combinaciones en la apertura. Al segundo movimiento de las blancas, los resultados son verdaderamente imprevisibles. El cálculo arroja las siguientes cifras:

Dos peones mueven $= 16 \times 14 \times 20 : 2$	= 2.240
Un peón mueve dos veces $= 16 \times 20 + 14$ casos de toma de piezas — 8 clavadas	= 326
Un peón mueve y una pieza mueve $= 121 \times 20 — 4$ obstrucciones de líneas	= 2.416
Un caballo mueve y retrocede	= 20
Un caballo mueve dos veces sin retroceder	= 200
Dos caballos mueven	= 80
Un caballo y una torre mueven	= 80
	5.362

De este cálculo se infiere que pueden presentarse diversos obstáculos; por ejemplo, la obstrucción de la diagonal 1AD-6TR de las blancas, después de **1. P3D, P4CR.**

Las dificultades aumentan cuando se intenta averiguar el número de posiciones que puede dar el segundo movimiento de las negras; por ello, no se conoció un valor constante hasta hace unos veinte años. Se tendrá una cantidad aproximada si se desestiman la ganancia de material, las clavadas y la obstrucción de líneas y se considera que los dos primeros movimientos de un bando dan 268 posiciones distintas; multiplicado por sí mismo, este número da 71.824 posibilidades. El valor obtenido así se estima exacto, por cuanto difiere del que han hallado otros autores, cuyos problemas se ofrecen en la literatura ajedrecista, en menos de 0,001. Se sabe que Cunnigham (1889) obtuvo 71.782 diferentes posiciones de 197.299 (?) series de movimientos; C. Flye Sainte-Marie (1895) halló 71.870 y, en 1903, redujo esta cifra a 71.852, la cual, Bufton, Gothwaite y Malherbe ratificaron entre los años 1943 y 1945.

Pero T. R. Dawson ha señalado que la cantidad 71.852 representa sólo la suma de las diversas posiciones geométricas y que bajo el punto de vista ajedrecista a este valor se le asocian 232 posiciones que difieren de otras 232 únicamente en la posibilidad de comer al paso. Para citar un ejemplo, compárese la posición **1. P4TD, P4CD; 2. P5T, C3AD** con la **1. P4TD, C3AD; 2. P5T, P4CD!** Por consiguiente, se tienen 72.084 posiciones distintas bajo el punto de vista ajedrecista[1].

Si se quiere tener una idea concreta del número de posiciones que ofrece el tercer movimiento de las blancas y el de las negras, habrá que averiguar primero cuántas posiciones dan los tres primeros movimientos de las blancas y multiplicar después el resultado por sí mismo y por 268, respectivamente. Veámoslo expuesto en forma sinóptica:

Un peón mueve tres veces	=	16
Un peón mueve dos veces y otro peón una vez ...	=	196
Tres peones mueven	=	448
Un caballo mueve tres veces	=	34
Un caballo mueve dos veces sin retroceder y otro caballo mueve una vez	=	20
Un caballo mueve dos veces y una torre una vez.	=	10
Dos caballos mueven una vez y una torre mueve una vez	=	8
Un peón y dos piezas mueven (C y C = 64; C y A = 124; C y T = 84; C y D = 70; C y R = 23; A y D = 65; A y R = 30, y D y R = 30)	=	490
Un peón mueve dos veces y una pieza una vez (C = 68; A = 28; T = 10; D = 19, y R = 6).	=	131

[1] Véase "Fairy Chess Review", pág. 44 (junio de 1946).

Un peón mueve y una pieza oscila ... ... = 16
Un peón mueve una vez y una pieza dos veces (C = 174; A = 108; T = 18; D = 139, y R = 15, de esto se deben restar 27 posiciones, por estar comprendidas en las 131 citadas anteriormente). = 427
Dos peones y una pieza mueven (C = 448; A = 380; T = 84; D = 230, y R = 84) ... ... = 1.226

3.022

Por lo tanto, se obtienen exactamente 3.022 posiciones distintas cuando las blancas mueven consecutivamente tres veces, mientras las negras han movido sólo una vez. Y así, el producto de 3.022 por 268 es 809.896, y 3.022 elevado al cuadrado da 9.132.484. En estos resultados no se cuenta lo adicional, como ganancia de material, clavadas y obstrucción de líneas, por no hablar de las sutilezas que presenta Dawson referentes a toda suerte de capturas de peones al paso. Así y todo, hay buenas razones para admitir que los resultados antedichos son exactos, pues su error es menor que 0,001; quiere esto decir que pueden formar de 809.000 a 811.000 coordinaciones, variaciones o arreglos con las 32 piezas al tercer movimiento de las blancas y de 9.120.000 a 9.140.000 al tercero de las negras. Por supuesto que en algunas de estas coordinaciones no estarán todas las 32 piezas.

Estos valores dan una somera idea de las numerosas posibilidades que tiene el principiante cuando se sienta frente al tablero de ajedrez. Que sea practicable sólo un número reducido de las "aperturas" calculadas teóricamente supone un alivio y una satisfacción para el ajedrecista. Si no, ¿cómo dar nombre a tanto sistema de apertura?

Al matemático se le plantea la cuestión de incrementar proporcionadamente las cantidades cuando se quiere calcular aproximadamente el número de posiciones que producen los movimientos cuarto, quinto, sexto, etc., de las negras. Pero el caso es que las posiciones son "magnitudes continuas" y, por lo mismo, las posibilidades de mover las distintas piezas aumentan sin intermisión; pero como el número de éstas disminuye en el transcurso de la partida, igualmente disminuye el de las posibilidades de formar coordinaciones con las piezas restantes. Con las pocas que comúnmente quedan en muchos finales se podrá formar un número de coordinaciones relativamente pequeño; tanto más cuanto que los peones tienen poca movilidad.

Esto ha motivado que se suscitase la cuestión de hallar el número de posiciones que pueden formarse con las 32 piezas, tomadas dos a dos, tres a tres, y así sucesivamente. Es lógico que en ello se descarten las posiciones contrarias a la norma del juego; si no se descartasen, el cálculo sería bastante fácil, pues con las 32 piezas se podrían formar teórica y matemáticamente coordinaciones de diversos órdenes en un tablero normal:

$$\frac{64!}{(2!)^6\,(8!)^2\,(32!)} =$$

$$= 4\,634.726\,695.587\,809.641\,192.045\,982.323\,285.670\,400.000.$$

Esta expresión carece de interés por contener muchas posiciones en que, por ejemplo, hay peones situados en las horizontales primera y octava de cada bando.

Por el contrario, si se atiende a la norma antedicha, el número de posiciones que se pueden formar con las 32 piezas es más o menos 10^{32}. En este lugar, Petrovič también ha calculado que las posiciones con 28 piezas dan un número coordinativo mayor. Véase: si 4 peones toman a otros 4, los 12 restantes tendrán posibilidades de transformarse, lo cual permitirá formar posiciones con combinaciones de material de lo más diverso, o sea, obtener el máximo número coordinativo. En tal caso, el número de posiciones conformes a la norma de juego será $2 \cdot 10^{43}$. Como el número de coordinaciones con 29, 27, 26 y menos piezas varía unas potencias de diez, sus valores pueden despreciarse ante las enormes posibilidades que ofrecen las coordinaciones con 28 piezas. Esto quiere decir que $2 \cdot 10^{43}$ representa aproximadamente todas las posiciones conformes a la norma de juego que pueden obtenerse en el tablero.

Se advierte que en tales cálculos no deben confundirse las posiciones con las series de movimientos, lo que suele ocurrir por desgracia. En su libro *666 partidas cortas*, K. Richter dice a este respecto: "Los matemáticos han calculado que con los 10 primeros movimientos se pueden obtener

169.518 829.100 544.000 000.000 000.000

posiciones diferentes. Esto hace que uno recuerde la inflación alemana del año 1923, y se le ponga la carne de gallina..."

Por otra parte, esta cantidad se cita mucho y se estima por su importancia y por su aparente exactitud; según cierto análisis, es el producto de los siguientes factores: $20^2 \cdot 28 \cdot 29 \cdot 30^{13} \cdot$ $\cdot\, 31 \cdot 32 \cdot 33$.

En un estudio documentado, A. S. M. Dickins prueba que un

[2] N. Petrović: *Šahovski Vjesnik* (1948), y K. Fabel: "Schwalbe" (mayo de 1963).

tal Edwin Anthony la insertó, como aportación personal, en la segunda edición de *Principles of Chess,* de James Mason, y que no expresa el número de posiciones que dan los 10 primeros movimientos, sino el máximo número de series de movimientos que las producen. En su cálculo, al cual sería oportuno aplicar estas palabras, de C. F. Grauss, "donde se observa más la falta de instrucción en matemáticas es en el cálculo aritmético desmedidamente riguroso", Edwin Anthony considera sólo las aperturas que se estilaban en su época y en ellas enumera las jugadas de que disponen por término medio las blancas y las negras en los movimientos primero, segundo, tercero y cuarto; a saber: 20, 28, 30 y 32 las primeras, y 20, 29, 31 y 33 las segundas. En los quinto, sexto, séptimo, octavo, noveno y décimo establece 30 posibilidades para cada bando y, así, obtiene el producto en cuestión.

Si se consideran no sólo las aperturas habituales, sino también las series de movimientos más disparatados, y se calcula con mayor exactitud, se obtendrá con bastante aproximación 10^{29} series de movimientos para las 10 primeras jugadas de las blancas y de las negras. En ello se ha establecido que cada bando tiene por término medio 20 posibilidades en el primer movimiento; 22,25 en el segundo; 24,8 en el tercero; 28 en el cuarto, y 1.000 en el quinto, sexto, séptimo, octavo, noveno y décimo, respectivamente.

¿CUANTO DURA UNA PARTIDA DE AJEDREZ?

No se trata de las partidas de los grandes maestros que se suspenden y, por ende, se prolongan muchas horas, ni de las que se juegan sin limitación de tiempo y el jugador perseverante aburre a su competidor, ni tampoco de aquellas que realizan los ajedrecistas aficionados en exceso, los cuales mantienen inclinada la cabeza sobre el tablero, mientras los camareros recogen bostezando de sueño y de fatiga las sillas del local y van colocándolas encima de las mesas.

¡No! Se pretende dilucidar este asunto en el aspecto puramente teórico; es decir: cuánto dura una partida, a cuyos autores no les importe ganar ni perder, sino prolongarla todo lo que se pueda. En ello se prevé realizar cierto número de jugadas dentro de un tiempo determinado, de una hora o de un día, por ejemplo. Si dos contrincantes pudiesen jugar una partida sin tasa ni limitación de tiempo y mover las piezas de una parte a otra del tablero, esto sería la verdadera respuesta a la pregunta en cuestión. Pero hemos de ajustarnos a menores límites; a la regla de las tablas determinadas por 50 movimientos, según la cual no se puede aplicar por iniciativa de un solo bando y, por tanto, la partida puede continuar.

En el párrafo 4.º del artículo 12 del reglamento, establecido por la Federación Internacional de Ajedrez, se dice que el resultado de una partida quedará en tablas "cuando a un jugador le toque mover y declare que ya se han efectuado 50 movimientos por bando y no se ha movido un peón ni cambiado una pieza".

Suprimimos algunas palabras de este texto, para que la regla rece así: "Una partida quedará en tablas si los dos contrincantes han hecho, por lo menos, 50 movimientos sin haber movido un peón ni cambiado una pieza."

El objeto de esta modificación es que la partida quede automáticamente en tablas conforme a las condiciones antedichas. Vamos a examinar de nuevo el caso que nos ocupa: de cuántos movimientos puede componerse una partida si sus autores la prolongan hasta el máximo. Sin duda, antes de que se produzcan los 50 movimientos del bando blanco y los 49 del negro se habrá de intercalar un cambio de piezas o el avance de un peón para evitar las tablas; mas se dispone de un número limitado de tales: las blancas pueden hacer sólo 48 con los peones y las negras otros 48 también con los peones; dentro de estos 96 movimientos deben producirse 8 cambios o capturas de piezas; si no, unos peones impedirían el avance de los otros. Las seis piezas que quedan y las 16 que se produzcan por coronación de peones irán desapareciendo en el transcurso del juego; por último, quedarán los dos reyes en el tablero, y la partida habrá finalizado. Por lo tanto, se presentará $96 + 6 + 16 = 118$ veces la oportunidad de evitar las tablas durante los 50 primeros movimientos. De consiguiente, una partida tendrá por límite $118 \cdot 50 = 5.900$ movimientos.

Esta cuestión ya fue tratada por T. R. Dawson, destacado autor inglés de problemas ajedrecistas. Primero señaló también esta cantidad[1]. Sin embargo, una investigación más circunstanciada de la marcha del juego demostró que no se podía llegar a dicho límite. Y así, en su conocido trabajo "Las fabulosas diferencias en el ajedrez"[2], Dawson ofrece una serie de problemas, cuyos autores son el maestro español doctor Sunyer y el experto danés N. Hoeg, referentes a la máxima duración de una partida. En la solución de los mismos se pudo comprobar que cada jugador perdía 2 movimientos al tener que efectuar dos retiradas, a consecuencia del avance de un peón o de la amenaza de una pieza por parte del adversario. Por eso, el límite antedicho se redujo a 5.898 movimientos.

Pero este valor tampoco es exacto, lo cual prueba el siguiente análisis:

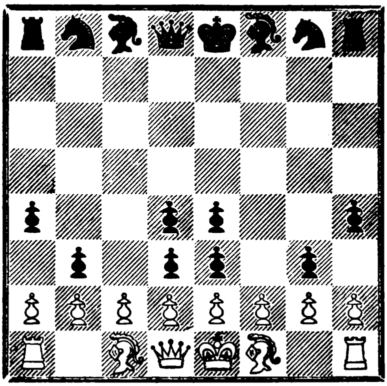
Primero movamos los peones negros y designemos por 50, 100, 150, etc., cada movimiento, procurando que su avance no estorbe posteriormente el de los blancos hacia la octava horizontal; para este fin será necesario que unos peones negros tomen en la columna contigua a la de cada uno de ellos y que el objeto de tal captura sean los caballos blancos, pues las otras piezas de este color habrán de permanecer en su posición inicial. Tras los 28 movimientos consecutivos de los peones negros, o sea, el 1.400 movimiento de las negras, se habrá producido esta posición (diagrama 1).

Aquí, los peones negros deben detener su avance (pérdida de un movimiento), para que muevan las blancas. El 1.450 movimiento de éstas será, por ejemplo, P3TD; este peón comerá

[1] Publicado en la revista "Chess Amateur" (mayo y junio de 1911).
[2] "Chess Amateur" (enero y julio de 1926, y junio de 1930).

luego en la columna CD, y los peones CD, AD y D lo harán en la AD, y lo mismo sucedará en el flanco de rey. En esto, las negras habrán de entregar 6 piezas. Luego de haber efectuado 48 movimientos o, lo que es igual, el 3.800, los ocho peones blancos se habrán convertido en pieza. Con el 3.850, las blancas toman la última pieza adversaria. Aquí, a las negras les toca mover sus peones (vuelve a producirse la pérdida de un movimiento), que también se convertirán en pieza al cabo de 20 movimientos, o sea, del 4.849 de su bando. Y se llega al 5.499 movi-

Diagrama núm. 1



miento de las negras después de haber tomado las 13 piezas blancas que habían en el tablero. Ahora, el rey blanco es un *rex solus* y debe ir tomando las 8 piezas adversarias procedentes de la transformación de los peones (pérdida de un tercer movimiento). Con el 5.849 de las blancas se llega a una posición donde el rey blanco, el negro y una dama o torre negras continúan en el tablero; un alfil o un caballo no pueden ser una de las últimas piezas que continúen en él, pues la partida quedaría en tablas. Al cabo de otros 50 movimientos se llega al 5.899, en el cual el rey blanco toma la pieza adversaria y se producen las tablas por quedar solamente los dos reyes, o hace otro movimiento que las producirá igualmente por aplicación de la regla antedicha. Con lo cual, el 5.899 movimiento del bando blanco sería definitivamente el último.

Contrariamente a la pérdida de movimientos acaecida en el análisis que acabamos de efectuar, la "ganancia" de un movimiento se logra así: unidos sin solución de continuidad, los peones blancos avanzan desde la segunda hasta la octava horizontal, mientras los negros deben dividirse en dos grupos. Esta simplificación se debe a K. Fabel[3], quien la publicó primero en el lugar citado, y después lo hizo más detalladamente en su libro *En el límite del tablero de ajedrez.*

Los más destacados autores de problemas están de acuerdo con este resultado por parecerles absurdo proseguir la partida con los dos reyes solos. Y así, queda demostrado que la solución de los interesantes problemas de Sunyer y Hoeg es incorrecta, debido a los errores de cálculo cometidos anteriormente. Veamos uno del doctor N. Hoeg: en una partida prevaleció desde su comienzo la regla de los 50 movimientos, no se dio ningún jaque y finalizó en la posición R1TR (blancas) y R1TD (negras) después de haber hecho el máximo número de movimientos, ¿cuál fue el último efectuado en ella? Como en la solución dada anteriormente es el 5.898 de las negras, o sea, el R7CD×T1TD, y se debe considerar inexacto según las verificaciones antedichas, la nueva solución será el 5.899 de las blancas, es decir, el R2CR×T8TR.

Las partidas "imaginarias" tienen por objeto hallar el límite máximo en que se pueden evitar las tablas. En posiciones con rey y alfil o caballo contra rey o con los dos reyes solos, un bando no alcanzará la victoria, aun cuando el otro juegue con imprecisión; luego la regla sobredicha carece de sentido. Y, sin embargo, sorprende que en la disposición vigente del mencionado artículo, la Federación Internacional haya añadido entre paréntesis el siguiente apéndice, que el Comité encargado de las normas de juego debería anular: "Las normas que determinan cuándo una partida queda en tablas son también aplicables a aquellas posiciones en que dar mate es técnicamente imposible. (Esto convendría igualmente aplicarlo a las posiciones en que están los dos reyes solos.) La partida quedará asimismo en tablas si ello concierne a uno de los cuatro apartados del artículo 12."

Por tanto, si a la "partida más larga" se le agrega otra serie de 50 movimientos y en ella han quedado sólo los dos reyes, el último movimiento que se efectúe será el 5.949 de las blancas[4].

En el lugar citado, también se propone incluir la anulación del enroque en la regla de los 50 movimientos, pues esto pone obstáculo a las tablas, lo mismo que el movimiento de los peones o la captura de una pieza. Por consiguiente, dicha anulación

---

[3] "Fairy Chess Review" (febrero de 1947).

[4] A. H. F. Britten lo publicó por primera vez en "The South African Chessplayer" (octubre de 1956).

A. J. Roycroft también trató este tema en la revista "BCM" (octubre de 1959).

significaría que el primer movimiento de cada torre sería equivalente a uno de peón o a la captura de una pieza a los efectos del citado artículo 12, apartado 4.

Así es que los autores de esta idea han dado mayor extensión al movimiento 5.949 de la "partida más larga", añadiendo una serie de 50 movimientos a cada movimiento de las 4 torres, y, de ese modo, han llegado hasta el 6.149 de las blancas. Pero en ello no han tocado un punto.

Si en el citado diagrama se considera una eventual posición creada antes del 1.449 movimiento de las negras, será evidente que se habrá movido, por lo menos, una torre blanca durante los últimos movimientos de las blancas, es decir, se habrá hecho uso de una de las dos posibilidades de enrocar. Pero esto se puede orillar si las negras hacen oportunamente C×A1D en el 50 movimiento, con lo cual impedirán las tablas. Este movimiento dará movilidad a la dama blanca, de modo que el 1.449 movimiento de las negras produzca ahora una posición sin el alfil blanco, pero con derecho a enrocar en uno u otro flanco.

Es claro que la ampliación de la sobredicha regla carece de utilidad práctica, por cuanto una partida real consta a lo sumo de 200 a 219 movimientos.

Asimismo es interesante el problema referente al máximo número de partidas distintas unas de otras; su cálculo se funda exclusivamente sobre las de carácter práctico, es decir, sobre aquellas que no se prolongan premeditadamente, duran unos cuarenta movimientos y ofrecen a cada bando la posibilidad de disponer de 30 jugadas y respuestas para elegir.

Por este medio se han obtenido de 10^{115} a 10^{120} partidas diferentes. En su libro "Mathematical Recreations", M. Kraitchik calcula unas $2{,}5 \cdot 10^{116}$. Y en su obra "A Mathematician's Miscellany", J. E. Littlewood precisa más este problema al hallar un límite de $(10^{10})^{70{,}5}$ partidas, valor definido por el par de potencias $(10^{10})^{70}$ y $(10^{10})^{71}$.

¡En esto, N. Petrović es el único que ha apurado por completo la teoría, pues basando su cálculo en el 5.899 movimiento de las blancas de la "partida más larga", ha hallado la sorprendente cantidad de $10^{18.900}$ partidas diferentes! [5].

---

[5] Publicado en la revista "Sahovski Vjesnik" (1948).

PARTIDAS DE MINIMA DURACION POR MATE

Hay 8 series de movimientos que empiezan en la posición inicial de la partida y terminan con mate al segundo movimiento de las negras; ejemplo: **1. P3AR, P3R; 2. P4CR, D5T** mate; 347 series que terminan igualmente con mate al tercer movimiento de las blancas y 10.828 al tercero de las negras.

Veamos una relación de tales partidas [1]:

a) Las blancas dan mate: 1) por el flanco de rey con D5TR, con D6CR, con A5TR y con A6CR en 305, en 28, en 8 y en 4 partidas, respectivamente, y 2) de frente con la dama, desde el punto 5R, en 2 partidas.

b) Las negras dan mate: 1) por el flanco de rey con D5TR, con D6CR, con A5TR y con A6CR en 9.262, en 976, en 243 y en 138 partidas, respectivamente; 2) de frente con la dama, desde la casilla 5R (si las blancas hacen R2R), en 77 partidas, y desde el 5D (si juegan R2D) en 4 partidas; 3) con un caballo, desde la casilla A6R, en 24 y, desde la 6D, en 48 partidas, respectivamente; 4) la dama da mate tomando en el punto 8AD (si las blancas prosiguen 2. A5CD y 3. D1AD) en 4 y (si 2. D2D y 3. D3D y 3. D2D) en 38 partidas; 5) la dama da mate, apoyada por un alfil, desde el escaque 5CR (si las blancas hacen R3AR) en 2 y, desde el 5CD (si las blancas juegan R3AD), en 4 partidas, respectivamente, y 6) la dama da mate, apoyada por un peón, desde la casilla 5CD (si las blancas prosiguen R3AD), en 1, desde la D5D (si las blancas hacen R3D), en 1, desde la D5D (en caso de que suceda R3R), en 1, desde la 5AR (si las blancas han jugado R3R), en 2 y, desde la 5AR (si ha sucedido R3AR), en 3 partidas, respectivamente.

Esta relación se puede ampliar sustituyendo algunos peones por piezas imaginarias en la posición inicial de la partida.

K. Fabel dedicó a E. Bonsdorff este problema [2]:

¿Cuántas partidas de mínima duración por mate producirá la sustitución de todos los peones por taxis de su correspondiente color en la posición inicial de cada partida?

---

[1] Publicada en "Deutsches Wochenschach", pág. 463 (año 1897).
[2] Publicado en la revista "Helsingin Sanomat" (18 de octubre de 1961).

El taxi es una nueva pieza imaginaria, inventada por K. Fabel; se sitúa en el puesto de un peón, y puede recorrer de una vez una, dos o tres casillas desde su posición inicial; ejemplo: 2TD-3TD, 2TD-4TD o 2TD-5TD; pero, si ha hecho uno de estos movimientos, habrá de adelantar o retroceder de casilla en casilla. No le está permitido situarse en la primera horizontal de su bando. Esta pieza se designa por X y se representa por un peón vuelto de abajo hacia arriba en el diagrama. Al llegar a la octava horizontal, tiene facultad para transformarse en otra pieza, lo mismo que el peón, o para continuar siendo taxi. Toma al modo del peón; pero con la diferencia de que, en caso de haber adelantado de una vez tres casillas, puede ser tomado al paso por otro taxi adversario que venga camino adelante por la columna contigua. Téngase presente que no se pueden mover los peones cuando en la posición hay uno o más taxis.

Solución: Las blancas dan mate en tres jugadas; veamos unas series de movimientos que lo producen: **1. X5D, X5R; 2. D4D, R2R; 3. D5R** mate; **1. X3R, X5R; 2. D5T, R2R; 3. D5R** mate; **1. X5AD, X3TR; 2. D2A, X5AR** (pero no 2. ..., X3AR); **3. D6C** mate; **1. X4D, X5AR; 2. D3D, X3TR; 3. D6C** mate; **1. X3R, X4AR; 2. D4C, X5TR; 3. D6C** mate; **1. X4R, X5CR; 2. D×X, X4AR; 3. D5T** mate; y **1. X3R, X5AR; 2. A3D, X3TR; 3. A6C** mate. Por tanto, el número de partidas será

$$2 + 3 + 18 + 12 + 36 + 6 + 12 = 89.$$

Observación: K. Fabel ideó el taxi para distinguir el mérito personal de E. Bonsdorff como usuario de este medio de transporte. La diferencia fundamental entre el peón y el taxi estriba en que el primero puede hacer a lo sumo 6 movimientos diferentes en una partida de ajedrez; en cambio, el segundo puede ejecutar

$$8 \cdot 12 + 15 + 1 + 1 = 113.$$

Este cálculo se debe a Osmo Kaila, ganador del tercer premio en el torneo de taxis (1961-1962); los términos del primer miembro de esta igualdad representan: las 8 columnas en que se pueden efectuar retrocesos de 12 movimientos en cada una de ellas, las 15 piezas adversarias que se podrán tomar en el transcurso de dichos movimientos, el adelantamiento de dos o tres casillas considerado como un movimiento y una conversión del taxi supone el último movimiento que éste efectúa.

Con objeto de evitar interpretaciones erróneas de ciertos datos, conviene aclarar que el taxi tiene facultad para comer dos veces al paso; véase: al movimiento X5TD de las blancas puede suceder X4CD×X5T a. p., y al X4TD también de las blancas puede seguir X5CD×X4T a. p.

El adelantamiento de dos o tres casillas sólo está permitido cuando un taxi abandona por primera vez su posición inicial.

E. Bonsdorff presentó este problema en el torneo de la FIDE (1963):

Si en la posición inicial se sustituye cada dama por una amazona (D + C), por una emperatriz (T + C) o por un saltamontes (la propia dama, pero con distinto modo de moverse)[3], es decir, si en la casilla de la dama situamos su respectivo caballo o su respectiva torre, según el caso, y designamos por Am la amazona, por E la emperatriz y por S el saltamontes, ¿cuál será el número de partidas de mínima duración por mate en cada caso?

1.er caso.—Con su segundo movimiento, la amazona negra puede dar mate al rey adversario desde las casillas 7AD y 7CR. Como el primero Am1D3AD de las negras es constante y con el segundo dan mate, enumeraremos solamente los movimientos de las blancas: **1. Am1D3AD** y **2. Am5TD** (también 2. Am5CD o 5R, 3AR, 3CR o bien 3TR) = 7 partidas; **1. Am1D3R** y **2. Am×PTD** (asimismo 2. Am6CD o 5D, 5R, 6R, 3AR, 4AR, 3CR, 4CR, 5CR, 3TR o bien 6TR) = 12; **1. P3R** (o 1. P4R) y **2. Am1D2R** = 2; **1. P3AR** (o 1. P4AR) y **2. Am1D2AR** = 2; **1. P3CR** (o 1. P4CR) y **2. A2C** = 2, y **1. P3R** y **2. A2R** = 1. El número de partidas será, por tanto, 7 + 12 + 2 + 2 + 2 + 1 = 26.

2.º caso.—**1. E1D3AD, P3TR** (tabién 1. ..., P4TD o P3CD, P4CD, P3D, P4D, P3CR, P4CR, P3TR, P4TR, C3AR o bien C3TR); **2. E×P2A** mate. De consiguiente, el número de partidas será 12.

3.er caso.—**1. P3TR** (o 1. P4TR), **S1D3CD; 2. T2TR** (o T3TR, si antes se ha hecho 1. P4TR), **S×C1CR** mate. Y así, el número de partidas será 3.

Variaciones temáticas: **1. P4CR, S1D3AR** (igualmente 1. ..., P3R o P4R); **2. P5C, S5TR+; 3. P3AR** (o 3. P4AR)!

---

[3] Véase *Piezas imaginarias* en el capítulo "Coordinaciones de piezas idénticas".

SERIES DE MOVIMIENTOS CON QUE EMPIEZA LA PARTIDA

En esta clase de problemas, un bando efectúa sucesivamente sus movimientos, y el otro mueve luego una vez (series de movimientos de automate, o de tablas por rey ahogado) y se le da mate o tablas por rey ahogado.

E. Bonsdorff ofrece el siguiente problema[1]:

¿Cuántas partidas de series de movimientos de mínima extensión terminan en mate por el movimiento del alfil de la dama blanca? Sólo mueven las blancas.

Solución: Sea la partida **1. P4D, 2. A4A, 3. D3D, 4. D4A, 5. A×P, 6. A×D, 7. D×A** y **8. A5T** (igualmente 8. A6C o A7A). Como el séptimo movimiento ha de ser forzosamente D×A y el octavo ocasiona el mate, calcularemos primero de cuántas maneras son realizables los seis primeros movimientos. Para este fin nos valdremos del siguiente planteamiento que indica el número de posibilidades: a) **1. P3D** y **2. D2D** = 1; b) **1. P3D** y **2. A4A** = 6; c) **1. P4D** y **2. D2D** = 1; d) **1. P4D** y **2. A4A** = 18, y e) **1. P4D** y **2. D3D** = 8. La suma de las posibilidades parciales se debe multiplicar por 3, porque esta cifra representa el número de movimientos con que se puede dar mate; a saber: **8. A5T, 8. A6C** y **8. A7A.** El número de partidas será, pues, $3 \cdot 34 = 102$.

E. Bonsdorff ofrece este otro problema[2]:

¿Cuántas partidas terminan brevemente en mate por series de movimientos exclusivamente de peones o de caballos? Sólo mueven las blancas.

1.^{er} caso.—Estas adelantan los peones R y CR hasta la sexta horizontal; luego, dan mate con **7. PR×PA** o con **7. PC×PA.** El número de partidas es

$$2 \cdot \frac{6!}{3!\ 3!} = 40.$$

2.° caso.—Sea, por ejemplo, la partida **1. C3AR, 2. C4D, 3.**

[1] Publicado en "Ilta Sanomat" (30 de septiembre de 1960).
[2] Publicado en "Uusi Suomi" (1 de octubre de 1960).

C6A, 4. C×D, 5. C6R, 6. C3AD, 7. C5D y **8. C×PAD** mate. Al caballo de la dama le bastan 3 recorridos cortos para alcanzar el punto 7AD, mientras el del rey tiene que hacer 6 recorridos de 4 movimientos cada uno para llegar al 8D, de donde puede retirarse a 3 casillas diferentes, lo cual no impide que el otro caballo dé igualmente mate desde 7AD. Por lo tanto, tendremos

$$3 \cdot 6 \cdot 3 \cdot \frac{7!}{2!\ 5!} = 1.134.$$

J. Kasanen aporta este trabajo, con el cual obtuvo el primer premio en el torneo, organizado por la Suomen Tehtäväniekat [3] y celebrado en los años 1960-1961:

Series de movimientos en los que se produce mate en seis jugadas. Las blancas mueven 6 veces consecutivas y contribuyen a que las negras les den mate en un movimiento. Hállese el número de soluciones.

1.^{er} caso.—**1. P4AR, 2. P5A, 3. P6A, 4. P×PR, 5. P×A=C** y **6. P4CR**. Resultan

$$\frac{6! \cdot 2}{5!} = 12.$$

2.^{o} caso.—**1. P3CD, 2. A3T, 3. A×PR, 4. A×A** (o 4. A3T, A4C, A6D o bien A4TR), **5. P4CR** y **6. P4AR** (o 6. P3AR, pero no A7R ni A6D). Se tienen

$$\frac{6!(5 + 4)}{4!} = 270.$$

3.^{er} caso.—**1. C3AD, 2. C5D, 3. C×PR, 4. C×A** (también 4. C×C, C6A o C5D), **5. P4CR** y **6. P3AR** (o 6. P4AR). Esto da

$$\frac{6! \cdot 4 \cdot 2}{4!} = 240.$$

Por tanto, el número de soluciones es

$$12 + 270 + 240 = 522.$$

[3] Asociación Finlandesa de Autores de Problemas de Ajedrez.

SERIES DE MOVIMIENTOS DE MINIMA LONGITUD GEOMETRICA

E. Bonsdorff participó con este problema en el XXXV torneo de temas ajedrecistas (1960-1961):

¿Qué número de partidas terminan en mate cuando la suma de las longitudes geométricas de sus movimientos es mínima?

Sea, por ejemplo, la partida **1. P3D, P3R; 2. D2D, R2R; 3. D3R, P4R; 4. D×P** mate. Al poderse efectuar en sucesión inversa los movimientos segundo y tercero de las negras, se obtienen dos partidas.

La suma de las longitudes de los movimientos es

$$7 + \sqrt{2} \approx 8{,}41.$$

Conviene recordar que la longitud total de los movimientos de la partida **1. P3AR, P3R; 2. P4CR, D5T** mate es

$$4 + 4\sqrt{2} \approx 9{,}66.$$

E. Bonsdorff dedicó a K. Fabel este problema [1]:

Si en la posición inicial de la partida se sustituyen las damas por amazonas, ¿cuántas partidas terminan en mate cuando la suma de las longitudes geométricas de sus movimientos es mínima?

Las seis partidas siguientes satisfacen al enunciado del problema: **1. P3R, Am1D3AD; 2. Am1D2R, Am×P2A** mate; **1. Am1D3AD, P3R; 2. Am4AD** (también 2. Am5AD y Am6AD), **Am1D2R; 3. Am×P2A** mate; **1. Am1D3AD, P3AD; 2. Am×P3A, Am1D2A; 3. Am×Am** mate, y **1. P4AR, Am1D3R; 2. R2A, Am4R; 3. Am1D1R, Am5R** mate. En cada partida, la suma total de las longitudes geométricas de sus movimientos es

$$5 + \sqrt{5} + \sqrt{2} \approx 8{,}65.$$

E. Bonsdorff propone este problema [2]:

---

[1] "Helsingin Sanomat" (9 de agosto de 1961).
[2] "Ilta Sanomat" (25 de marzo de 1961).

¿Cuántas series de movimientos empiezan en la posición inicial de la partida y terminan en una de jaque y otra de jaque doble, de suerte que la suma total de las longitudes geométricas de sus movimientos sea mínima?

1.^{er} caso.—La posición de jaque da 2 series de movimientos: **1. P3R, P3CD; 2. R2R, A3T+**, y **1. P3CD, P3R; 2. A2C!, R2R; 3. A3T+**. Por tanto, la suma de las dimensiones geométricas de sus movimientos será

$$3 + 2\sqrt{2} \approx 5{,}83.$$

2.° caso.—La posición de jaque doble da 1 serie: **1. P4R, P3D!; 2. R2R, P4D; 3. R3D, P×P+**. Y la suma total de las dimensiones geométricas de sus movimientos es

$$5 + 2\sqrt{2} \approx 7{,}83.$$

E. Bonsdorff participó con este trabajo en la competición internacional de soluciones de problemas (1962):

El punto de partida es la posición inicial del juego, ¿cuántas partidas terminan en mate por series de movimientos de un peón que se convierte en pieza mayor, siendo mínima la suma total de las longitudes geométricas de los movimientos? Sólo mueven las blancas.

Solución: La longitud geométrica de la partida más corta es

$$5 + 4\sqrt{2} \approx 10{,}66.$$

Veamos unos ejemplos: **1. P3CD, 2. A3T, 3. P4AR, 4. P5A, 5. P6A, 6. P×PR** y **7. P×A=D** mate. Y **1. P3D, 2. P4D, 3. P5D, 4. P6D, 5. P×PR, 6. D2D, 7. D3A, 8. D4C** y **9. P×A=T** mate.

En el cálculo de estos ejemplos se debe tener en cuenta que el alfil, la dama y el peón que se transforma en pieza mayor pueden realizar movimientos aún más cortos; que dicho peón tiene dos posibilidades de transformarse, y que en el primer ejemplo se puede mover el peón D en vez del AR. Luego el número de partidas que se busca será

$$2 \cdot 2\left(\frac{6!}{2!\ 4!} + \frac{7!}{2!\ 5!} + \frac{7!}{3!\ 4!} + \frac{8!}{3!\ 5!}\right) +$$
$$+ 2\left(\frac{5!}{2!\ 3!} + \frac{6!}{2!\ 4!} + \frac{6!}{3!\ 3!} + \frac{7!}{3!\ 4!}\right) =$$
$$= 4(15 + 21 + 35 + 56) + 2(10 + 15 + 20 + 35) = 668.$$

EL JUEGO FORTUITO EN EL AJEDREZ

E. Bonsdorff propone este problema inédito:

¿Cuál es el número más probable de partidas si se efectúan movimientos fortuitos?

Las partidas **1. P3AR, P3R; 2. P4CR, D5T++**, y **1. P3AR, P4R; 2. P4CR, D5T** mate son las más probables, por cuanto la probabilidad de que sucedan es

$$1/20 \cdot 1/20 \cdot 1/19 \cdot 1/30 = 1/228.000 \approx 4{,}4 \cdot 10^{-6}.$$

E. Bonsdorff propone este otro problema también inédito:

Si a partir de la posición inicial se efectúan movimientos fortuitos, ¿cuántas posiciones más probables y cuántas menos probables se habrán formado tras el segundo movimiento de las negras?

1.er caso.—La posición más probable es la inicial, porque puede volver a producirse. En el primer movimiento hay 20 posibilidades de mover; por tanto, la probabilidad de que se mueva una pieza u otra es 1/20, y la de que suceda **1. C3TD** o **1. C3T3** (blancas) será evidentemente $2 \cdot 1/20 = 1/10$. La probabilidad de que se produzca **1. C3AD** o **1. C3AR** es igualmente 1/10, y la de que el caballo vuelva a su punto de salida al segundo movimiento es 1/20 en el primer caso y 1/22 en el segundo. Estas consideraciones son aplicables a los movimientos de los caballos negros. De aquí que las probabilidades de volver a la posición inicial sean

$$[1/10\ (1/20 + 1/22)]^2 = 441/4\,840.000 \approx 9{,}1 \cdot 10^{-5}.$$

Las demás posiciones son menos probables. Hay casi más probabilidad de que se formen tres posiciones con los movimientos **1. P3R** (o 1. P4R), **P3AR; 2. D5T+, P3CR** y **1. P3R, P4AR; 2. D5T+, P3CR.** Si se considera que los movimientos de las negras pueden igualmente efectuarse en sucesión inversa, resultará

$$(1/20 \cdot 1/20 \cdot 1/30)\ (1 + 1/21) = 11/126.000 \approx 8{,}7 \cdot 10^{-5}.$$

2.º caso.—Las posiciones menos probables son aquellas que se obtienen de una sola manera y en ellas el número de posibles movimientos del bando blanco en su segundo movimiento, multiplicado por el correspondiente del negro, es máximo. Después de **1. P4R, P4D; 2. A4A,** los posibles movimientos (12 en total) de las piezas negras (del rey, de la dama, del alfil, del peón 4D y el del salto del caballo a 2D) producen una posición cuya probabilidad es mínima, es decir:

$$1/20 \cdot 1/20 \cdot 1/31 \cdot 1/30 \approx 2{,}7 \cdot 10^{-6}.$$

La continuación **1. P4D, P4R; 2. A4A** no da el resultado deseable, porque en ella el sobredicho producto de los movimientos posibles es menor ($29 \cdot 32 < 31 \cdot 30$). Y así, 12 es el número de las posiciones buscadas.

Conviene señalar que, si ambos han efectuado dos movimientos fortuitos, la posición inicial aparente se presentará casi 34 veces como una de las posiciones menos probables arriba citadas.

A este respecto, véase el capítulo "Las probabilidades", de K. Fabel.

ANALISIS RETROACTIVO

J. Himberg dedicó este trabajo a E. Bonsdorff[1]:

¿Cuántas series de movimientos cortos comienzan en la posición inicial de la partida y producen una, de la cual se puede inequívocamente deducir el último movimiento efectuado en ella si hay oportunidad de dar mate o jaque o no la hay?

1.er caso.—Sea **4. A6C** el movimiento con que se da mate en la partida **1. P3R, P4TR; 2. A3D, P4CR; 3. A7T, P4AR; 4. A6C** mate. Las blancas cuentan sólo con una serie de movimientos. Los dos primeros de las negras pueden ser distintos, y se deben enumerar separadamente: **1. ..., P4TD** dará 12 posibilidades en el segundo movimiento (que no debe ser 2. ..., T2TD). Los demás movimientos darán las siguientes posibilidades: P3TD = 11, P4CD = 13, P3CD = 13, P4AD = 11, P3AD = 10, P4D = 2, P3D = 2, P3AR = 12, P4CR = 12, P3CR = 1, P4TR = 12, P3TR = 12, C3TD = 12, C3AD = 13, C3AR = 4 y C3TR = 3. (¡Conviene tener en cuenta los movimientos C3TR, P3AR y C4AR!) Esto da 155 series.

2.º caso.—Las blancas dan jaque con un peón en su tercer movimiento; veámoslo: **1. P4AD, P4D; 2. P5A, R2D; 3. P6A+.** Lo cual se puede hacer con 5 peones. Al movimiento del peón R se puede responder de 4 maneras distintas, y al de los otros peones, de 2 maneras en cada caso. Por tanto, se obtendrán 12 series.

3.er caso.—Tres partidas forman el grupo de las que finalizan al séptimo movimiento de las blancas:

1.ª **1. P3TD, C3AD; 2. C3AR, C5C; 3. C4T, C7T; 4. C5A, C3A; 5. C3C, C4D; 6. T1C, C4D6A** (diagrama 2): **7. C1T!**

2.ª **1. P3TR, C3AD; 2. C3AR, C4T; 3. C4D, C3AR; 4. C3C, C4D; 5. T2T, C6A; 6. C1T, C6C; 7. T1C!**

3.ª **1. P3TD, C3AD; 2. C3AR, C3A; 3. C4D, C4D; 4. C5C, C3A5C; 5. C5C3A, P3TD** (también 5. ..., P3TR, o T1CD, o bien T1CR); **6. C2T, C6A; 7. T1C!**

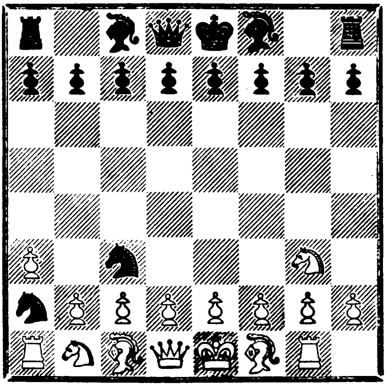
Calculemos cuántas series de movimientos preceden a **7. C(3C)1TR** en la primera partida de este grupo.

---

[1] "Helsingin Sanomat" (22 de octubre de 1961).

El caballo del rey blanco puede llegar al punto 3CR en 4 movimientos, efectuados de 5 maneras distintas; veámoslo: 1) C3AR-4D-5A-3C; 2) C3AR-5C-4R-3C; 3) C3AR-4T-5A-3C; 4) C3TR-4A-5T-3C, y 5) C3TR-5C-4R-3C. En cualquiera de las 5 maneras que este caballo se mueva, la torre podrá trasladarse al escaque 1CR en 4 momentos distintos. Luego el quinto

Diagrama núm. 2



movimiento de las blancas da $5 \cdot 4$ posibilidades de mover. El avance del peón a 3TD puede hacerse de 6 maneras diferentes en cada serie de movimientos. Por consiguiente, el número de series con que cuentan las blancas será

$$6 \cdot 5 \cdot 4 = 120.$$

El caballo del rey negro va del punto 1CR al 6AD por 2 recorridos de 3 movimientos cada uno, y el de la dama de este color dispone de los mismos recorridos y movimientos para ir de 1CD a 7TD. Esto da a las negras

$$2 \cdot 2 \cdot \frac{6!}{3!\ 3!} = 80$$

posibilidades de mover.

El riesgo de concurrir simultáneamente dos piezas en un mismo punto está en los escaques 2TD y 4R de las blancas. Primero consideremos el 2TD; el número de series de movimientos que no suceden por evitar la concurrencia en este escaque es

$$2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot (12 + 3 \cdot 8 + 6 \cdot 4) = 1.200.$$

Los factores 2, 2 y 5 representan los dos recorridos de cada caballo negro y los cinco del caballo del rey blanco. El caballo de la dama negra puede tomar el peón 2TD al tercer, cuarto o quinto movimiento, lo cual representan los sumandos encerrados en el paréntesis; por ello, consideremos la siguiente serie imaginaria de movimientos, o sea, movamos imaginariamente el peón que ha tomado dicho caballo, **1. C3AR, C3TD; 2. C4D, C5C; 3. C5A, C×P2T; 4. P3TD, C3A; 5. T1C, C4D; 6. C3C, C(4D)6A,** y calculemos los diversos modos (imaginarios) de realizarlos cuando las negras toman el citado peón en su tercer movimiento. En este caso, los movimientos del caballo y el de la torre de rey podrán realizarse de cuatro modos distintos, y el peón de referencia (ya tomado) podrá hacerlo en tres diferentes lugares de cada una de las series; por tanto, como la serie de movimientos de las negras es constante, habrá $4 \cdot 3 = 12$ posibilidades de realizarlos, lo cual representa el primer sumando de la suma encerrada en el paréntesis. Si las negras toman dicho peón al cuarto o al quinto movimiento, éste podrá ser incluido en 2 lugares o en 1 de cada serie, según el caso; tras esto, las negras tendrán respectivamente 3 y 6 posibilidades de efectuar sus movimientos.

Ahora calcularemos las rectificaciones que resultan de concurrir en el escaque 4R de las blancas; el caballo del rey blanco dispone de 2 recorridos cortos para llegar al citado escaque, y el de la dama negra dispone igualmente de otros 2 para alcanzar el 7TD. Sea un recorrido dado; si se consideran las concurrencias en el escaque 4R y en el 2TD blancos, se obtendrán las siguientes cifras rectificadoras, cuya suma se habrá de multiplicar por 4:

El caballo blanco toma el negro	3.er	movimiento:	$6 \cdot 4 - 2 = 22$
	4.º	”	$10 \cdot 3 \cdot 3 - 6 = 84$
	5.º	”	$8 \cdot 6 \cdot 2 = 96$
El caballo negro toma el blanco	3.er	”	$2 \cdot 3 \cdot 6 - 4 = 32$
	4.º	”	$3 \cdot 2 \cdot 14 - 9 = 75$
	5.º	”	$4 \cdot 15 - 15 = 45$
			354

Resulta, pues:

$$120 \cdot 80 - (1.200 + 4 \cdot 354) = 6.984.$$

Veamos cómo se calcula el término rectificador cuando el caballo blanco toma el negro al tercer movimiento en la casilla 4R; para llegar a ella tiene que hacer tres movimientos. Sea el recorrido por el punto 3AR, por ejemplo; aquí pueden las blancas realizar sus tres movimientos siguientes en 6 series diversas. Veámoslo: 1) P3TD, C3C y T1C; 2) P3TD, T1C y C3C; 3) C3C, P3TD y T1C; 4) C3C, T1C y P3TD; 5) T1C, P3TD y C3C, y 6) T1C, C3C y P3TD. Los 2 primeros movimientos de las negras (C3AR y C5R) son constantes; luego, éstas hacen otros 3 con el caballo de la dama y 1 imaginario con el del rey que ya han sacrificado. Y cuando el caballo de la dama avanza por el punto 3TD, sus posibilidades son las siguientes: 1) C6A (movimiento imaginario), C3TD, C5C y C(5C)7T; 2) C3T, C6A (imaginario), C5C y C(5C)7T; 3) C3T, C5C, C6A (imaginario) y C(5C)7T, y 4) C3T, C5C, C7T y C(5R)6A (imaginario). Las concurrencias o coincidencias en la casilla 2TD blanca ya están restadas; por eso, el término rectificador queda reducido por el número de coincidencias dobles, que son 2, si las blancas toman el caballo adversario 5R al tercer movimiento: **1. C3AR, C3AR; 2. C5C, C5R;** 3. C×C, C3T; **4. C3C** (o 4. T1C), **C5C; 5. T1C** (o 5. C3C), **C×P2T; 6. P3TD** (movimiento imaginario), **C(5R)6A** (movimiento también imaginario).

La segunda partida da 508 series y la tercera 9.666; estos resultados se obtienen siguiendo el procedimiento que se ha seguido para obtener el número de series de la primera. Por tanto, la solución del tercer caso es

$$6.984 + 508 + 9.666 = 17.158.$$

¡El problema es complejo! Este tema cautivó la atención y el ánimo de los aficionados a los problemas de ajedrez matemáticos, y la verdadera solución del mismo ha sido hallada con el esfuerzo colectivo de varios autores.

Conviene señalar que V. Röpke, Th. Siers y K. Fabel, coautor de este libro, ya tenían noticia de la posición reflejada en el diagrama número 2 [2].

E. Bonsdorff compuso este trabajo con motivo de la Navidad de 1963:

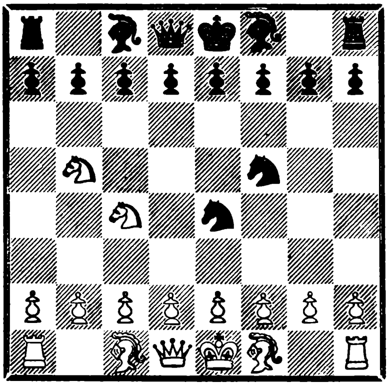
"¿Cuántas series breves producen una posición en la que no se ha movido ningún peón ni falta ninguno y de la que se puede deducir inequívocamente el último movimiento efectuado en ella?"

Solución: Consideremos las 5 siguientes posiciones que resultan después del quinto movimiento de las negras; en ellas se mueven solamente los caballos. Las casillas ocupadas por los blancos están indicadas en la izquierda del guión, y viceversa:

---

[2] Consúltese la revista "Schwalbe" (diciembre de 1934 y mayo de 1935).

Diagrama núm. 3



1.ª) C5CD, C4AD — C5R, C4AR (diag. 3); 2.ª) C5CD, C4R — C5AD, C4AR; 3.ª) C5CD, C5AR — C5R, C5AD; 4.ª) C4AD, C4R — C4CD, C4AR, y 5.ª) C4AD, C5AR — C4CD, C5R. Si las blancas dan jaque con uno de sus caballos desde la casilla 6D, habrá una posición, de donde se podrá deducir el último movimiento efectuado en ella.

Téngase en cuenta que una posición, donde los caballos blancos ocupen las casillas 4R y 5AR y los negros las 4CD y 5AD, no puede haberse producido al cabo de 5 movimientos. Por otra parte, es fácil ver que, si en la posición C4R, C5D — C4TR, C5R, las blancas diesen jaque desde el punto 6AR, de la posición resultante no se podría deducir el último movimiento realizado en ella, por cuanto el caballo del rey negro también habría podido saltar de la casilla 1CR a la 3AR.

Sin atender a las series de movimientos, veamos primero cuántos recorridos hacen los caballos para formar las 5 posiciones en cuestión. En la primera, los blancos pueden hacerlo en 3 recorridos distintos (C1C — 3TD (o 3AD) — 5C, C1C - 3AR — 5R — 4A y C1C — 3TD — 4A, C1C — 3AR — 4D — 5C) y los negros en 2 (C1C — 3TD — 4A — 5R, C1C — 3TR — 4AR y C1C — 3AD — 5D — 4A, C1C — 3AR — 5R). Como a cada uno de los 3 recorridos de las blancas corresponden 2 de las negras, el número de tales recorridos será $3 \cdot 2 = 6$. Y en las cuatro posiciones restantes tendremos respectivamente $5 \cdot 2 = 10$, $4 \cdot 2 = 8$, $3 \cdot 1 = 3$ y $2 \cdot 1 = 2$.

Averigüemos ahora el número de series en que pueden sucederse los movimientos, si los caballos realizan cierto recorrido. Ejemplo: sean los recorridos C1C — 3TD — 4A y C1C — 3AR

— 4D — 5C del bando blanco, y C1C — 3TD — 4AD — 5R y C1C — 3TR — 4A del negro. El primero efectúa 2 movimientos con un caballo y 3 con el otro, luego el número de series del mismo será

$$\frac{5!}{2!\ 3!} = 10.$$

Este resultado es asimismo valedero para el segundo, pues ha efectuado igualmente 2 movimientos con un caballo y 3 con el otro. Por lo que, si los caballos han hecho los recorridos mencionados, el número de series de la primera posición será

$$10 \cdot 10 = 100.$$

El número de series que produce las 5 posiciones de referencia es reducido por las coincidencias que tienen lugar en el punto 4D blanco. Por ello, hay que calcular cuántas series pueden formar la primera posición cuando el caballo del rey blanco se traslada al escaque 5CD y el de la dama negra lo hace al 4AR. Los dos no coincidirán en la casilla 4D si el primero la abandona antes de que el segundo se sitúe en ella o si éste se retira de la misma antes de que aquél la ocupe. En el primer caso, el caballo del rey blanco la ocupará al tercer o cuarto movimiento; en el segundo caso, lo hará al quinto movimiento. Si sucede **3. C(4D)5C,** el bando blanco contará sólo con 1 serie y el negro con 7 series; si ocurre **4. C(4D)5C,** cada bando dispondrá de 3 series, y si se produce **5. C(4D)5C,** el primero obtendrá 3 series y el segundo 1 serie. Por tanto, la suma total de ellas será

$$1 \cdot 7 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 1 = 19.$$

Este mismo número de series produce la quinta posición cuando el caballo del rey blanco se dirige a la casilla 5AR por el punto 4D y el de la dama negra va a la 4CD por dicho punto. Si se tiene, además, en cuenta que las blancas pueden dar jaque con uno u otro caballo en su sexto movimiento, el número total de series es

$$2\,[100\,(5 + 10 + 8 + 3 + 1) + 2 \cdot 19] = 5.476.$$

LA POSICION INICIAL APARENTE

E. Bonsdorff propone el siguiente problema [1]:

¿Cuántas partidas terminan brevemente por demanda de tablas?

Solución: La posición inicial de la partida puede antes que cualquier otra repetirse 3 veces, si cada vez le toca mover al mismo jugador; a saber: después de que cada bando haya hecho 4 movimientos. Como los dos bandos pueden jugar de 4 maneras distintas sus caballos, las series de movimientos 4^2 repiten la posición inicial tras el segundo movimiento de las negras, y las series $4^4 = 256$ vuelven a repetirla al cuarto movimiento de éstas. Por lo cual, partiendo de la posición inicial de la partida, y con las 256 series, se formará una en la que el bando negro podrá pretender las tablas si anuncia que va a efectuar su cuarto movimiento y a producir con él la misma posición que se tenía al comenzar la partida.

K. Fabel dedicó este problema a E. Bonsdorff [2]:

Si al comienzo de la partida se sustituyen los peones por taxis (véase el capítulo "Partidas de mínima duración por mate"), ¿cuántas series breves formarán una posición que se parezca a la inicial, pero que en ella les toque mover a las negras?

Solución: El número de series de movimientos de la clase **1. X4TD, X3TD; 2. X3TD, X2TD; 3. X2TD** es $8 \cdot 8$ y $8 \cdot 4$ el de las que se forman con el movimiento de los caballos negros. Por consiguiente, el número total de series será

$$8 \cdot 12 = 96.$$

Esta idea no se puede expresar en el ajedrez clásico; por ello, hay que recurrir a las piezas imaginarias. Recuérdese que ocurre lo mismo cuando se sustituyen los caballos por caballeros nocturnos, $4 \cdot 6 = 24$ series, y las damas por amazonas, $2 \cdot 6 = 12$ series.

E. Bonsdorff obtuvo con este problema el tercer premio en el XXXV torneo de temas ajedrecistas (1960-1961):

[1] "Helsingin Sanomat" (20 de diciembre de 1961).
[2] *Ibídem* (18 de octubre de 1961).

¿Cuántas partidas breves originan una posición, aparentemente igual a la inicial, en la que los dos bandos han perdido el derecho a enrocar?

Solución: Es claro que tendrán que moverse los caballos y las torres. El bando blanco puede dar movilidad a las suyas, jugando los caballos de 4 maneras diferentes. Veámoslo: C3TD y C3AR, C3TD y C3TR, C3AD y C3AR, y C3AD y C3TR. Por ejemplo: si consideramos la serie de movimientos C3TD, T1CD, T1TD, C1CD, C3AR, T1CR, T1TR y C1CR, tendremos que la serie del flanco de rey y la del de la dama son constantes. Lo mismo sucederá en los dos flancos de las negras; por tanto, el número de partidas pedido será

$$\left(\frac{4 \cdot 8!}{4!\ 4!}\right)^2 = 78.400.$$

EJERCICIOS

Los siguientes problemas parten de la posición inicial de la partida, exceptuando el séptimo y el décimo por contener piezas imaginarias. Los primeros son fáciles y los últimos difíciles.

1.º E. Bonsdorff participó con este ejercicio en la competición de soluciones de problemas, celebrada en el verano de 1964:

¿Cuántas series de movimientos breves dan origen a una posición que no vuelve a producirse?

2.º E. Bonsdorff propone este problema [1]:

¿En cuántas series de movimientos de mínima extensión se da jaque al mover un peón?

3.º E. Bonsdorff insertó este ejercicio en la publicación dedicada al programa de los campeonatos de ajedrez finlandeses (1962):

Averiguar el número de series breves que forman una posición, en la cual se pueda dar jaque con una torre.

4.º E. Bonsdorff ofrece este problema [2]:

Calcúlese el número de series de mínima extensión que causan el doblamiento de tres peones.

5.º E. Bonsdorff propone este otro problema [3]:

¿En cuántas series cortas se produce una posición, en la que los dos bandos han perdido una torre?

6.º S. Urpo concurrió con este problema en el torneo organizado por la Suomen Tehtäväniekat (1960-1961), y fue galardonado con la primera mención honorífica:

Las negras procuran simetrizar prolongadamente su juego con el de las blancas, ¿en cuántas series de mínima extensión pueden éstas impedirlo?

7.º E. Bonsdorff presentó este trabajo en el torneo de soluciones de problemas, celebrado en el verano de 1964:

¿Cuántas partidas terminan brevemente en mate cuando en el tablero se sustituyen los caballos por piezas imaginarias? A saber: un camello, una jirafa o una cebra.

---

[1] "Tidskrift för Schack (marzo de 1960).
[2] "Helsingin Sanomat" (6 de marzo de 1960).
[3] "Helsingin Sanomat" (7 de septiembre de 1960).

Primero veamos cómo se mueven tales piezas: un camello blanco colocado en el punto 4D de su bando puede saltar a las casillas 3TD, 5TD, 1AD, 7AD, 1R, 7R, 3CR y 5CR y tomar la pieza que esté en cualquiera de ellas; una jirafa blanca situada en dicho punto puede hacerlo a los escaques 8AD, 8R, 3TR y 5TR, y una cebra también blanca puede trasladarse del punto referido a los puntos 2TD, 6TD, 1CD, 7CD, 1AR, 7AR, 2CR y 6CR. En la posición inicial de la partida, el camello situado en 1CD puede ir a las casillas 4TD y 4AD; la jirafa a las 5TD y 5AD, y la cebra a las 4D y 3R, situadas ambas piezas en la 1CD.

Merece, por último, notarse que sólo un tercio de los participantes en dicho torneo halló la solución total de este problema.

8.º E. Bonsdorff ofrece el siguiente problema[4]:

Averígüese el número de series breves que originan una posición, en la cual se da jaque con el enroque a uno u otro flanco.

¡Ni el autor de este problema ni ningún entendido en esta materia pudieron hallar en su día la verdadera solución del mismo!

9.º E. Bonsdorff e I. Makihovi ofrecen este problema[5]:

¿Qué número de partidas terminan brevemente en mate cuando cada bando procura hacer los movimientos más largos geométricamente?

Sirvan de ejemplo las siguientes partidas, aunque excedan en medio movimiento a las expresadas en el enunciado del problema: **1. C3AR, C3AR; 2. C5C, C4D; 3. C×P2T, C3AD; 4. C×A, T×P; 5. C6R, T7-1T; 6. T×T** mate; **1. C3AR, C3AR; 2. C4D, C3A; 3. C6R, C4TD; 4. C×D, C3A; 5. C6R, C1D; 6. C×PA** mate; **1. C3AR, C3AR; 2. C5C, C3A; 3. C6R, C4R; 4. C×A, C3C; 5. C6R, C1A; 6. C×PC** mate, y **1. C3AR, C3AD; 2. C5R, C5C; 3. C×PA, C3TR; 4. C×C, C6D+; 5. PR×C, P4CR; 6. D5T** mate.

10.º E. Bonsdorff propone este problema[6]:

Si en la posición inicial se sustituyen todos los peones por taxis, ¿cuántas partidas de mínima extensión acaban en mate cuando los dos bandos procuran hacer los movimientos más largos geométricamente?

Ejemplo: Sea la partida, aun cuando también exceda en medio movimiento a las expresadas en el enunciado del problema, **1. X5AR, X5R; 2. X5CR, A6T; 3. X5AD, D×X; 4. D4T, D1D; 5. D1D, D5T** mate. No es fácil hallar la verdadera solución.

---

[4] "Helsingin Sanomat" (17 de abril de 1960).
[5] "Ilta-Sanomat" (31 de diciembre de 1960).
[6] "Ilta-Sanomat" (15 de diciembre de 1961).

Soluciones

1.ª Por ejemplo: **1. P3R, P3AR; 2. D5T+,** y las negras se ven forzadas a responder con **2. ..., P3CR.** Ya que el peón blanco R y el negro AR pueden moverse de 2 maneras diferentes, se tienen $2 \cdot 2 = 4$ series de 1,5 movimientos cada una.

2.ª En 18 series. Por ejemplo: **1. P4D, P4R; 2. P5D, R2R; 3. P6D+, 1. P4AD, P3AR; 2. D3C, R2A; 3. P5A+** y **1. P4CR, P4D; 2. A3T, R2D; 3. P5C+.**

3.ª Así que las blancas adelanten el peón D, el R o el AR, su rey podrá alcanzar la tercera horizontal en 2 movimientos, y una torre adversaria le dará jaque con su tercer movimiento. Véase: **1. P3D, P4TD; 2. R2D, T3T; 3. R3A, T3AD+.** Como las dos torres pueden dar jaque, como el rey alcanza de dos maneras la tercera horizontal y como el peón tiene dos posibilidades de adelantar, hay $3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 24$ soluciones de esta clase. La serie de la clase **1. P3AR, P4TR; 2. P4CR, P×P; 3. R2A, T×P+** da otras 4 soluciones, porque el peón blanco AR tiene dos continuaciones y tanto éste como el del CR pueden moverse en diversas sucesiones. En caso de que el peón blanco 2R avance hacia la casilla 6R, se tendrán 2 soluciones: **1. P4R, P4TD** (o 1. ..., P4TR); **2. P5R, T3T** (o 2. ..., T3TR); **3. P6R, T×P+.** Además de la solución **1. P4R, P4TR; 2. D×P, T×D; 3. P5R, T×P+.** Así, el número total de series será $24 + 4 + 2 + 1 = 31$.

4.ª Esto no se logra hasta el tercer movimiento de las negras. Por ejemplo: **1. P4R, P4D; 2. A4A, P×P; 3. A6R, P×A.** El bando negro puede hacer **1. ..., P4AR** y el blanco **2. D4C,** por lo que **1. P4R** da 4 series; si el segundo hace **1. P4D,** el primero contestará con **1. ..., P4AD** o **1. ...,** P4R, y el otro habrá de proseguir **2. A4A,** lo cual dará 2 series. La continuación **1. P4AD** da 1 serie; véase: **1. P4AD, P4CD; 2. D4T, P×P; 3. D6A, P×D,** pues no se puede hacer **1. ..., P4D,** porque la dama blanca daría jaque desde la casilla 4T al segundo movimiento. Por tanto, el número de series será $4 + 2 + 1 = 7$.

5.ª En 2 series simétricas: **1. P4TD, P4CD; 2. P×P, P3TD; 3. T×P, T×T; 4. P×T** y **1. P4TR, P4CR; 2. P×P, P3T; 3. T×P, T×T; 4. P×T.**

6.ª No se puede satisfacer al enunciado del problema antes del tercer movimiento de las blancas en el cual éstas dan jaque con el caballo o con el alfil o con la dama, o bien con ésta toman la adversaria o le interceptan el paso. Véase: **1. C3AD, C3AD; 2. C4R, C4R; 3. C6A+, 1. P4R, P4R; 2. A4A, A4A; 3. A×P+, 1. P4R, P4R; 2. D4C, D4C; 3. D×P+, 1. P4AD, P4AD; 2. D4T, D4T; 3. D×D** y **1. P3AD, P3AD; 2. D3C, D3C; 3. D5C.**

Después de cada primer movimiento de las blancas, el número de series de mínima extensión da las siguientes posibilidades: C3TD = 3; C3AD = 6; P3AD = 4; P4AD = 6; P3D = 1; P4D = = 4; P3R = 9; P4R = 12; P4AR = 2, y P3CR = 1. Que suman en total 48.

7.ª El primer caso **1. CalCD4AD, CalCR4AR; 2. Ca×Ca** mate da 15 partidas, el segundo **1. Ji1CR5TR, P3TR; 2. Ji4D** mate da 12 y el tercero **1. Ce1CR3D, P4D; 2. Ce5CR** mate da 15.

8.ª Las blancas pueden dar jaque con el enroque corto o con el largo en su quinto movimiento.

Veamos primero el corto: **1. P4R, P4AR; 2. A2R, P×P; 3. C3TR, P6R; 4. PA×P, R2A; 5. 0-0+;** los movimientos **1. P4R, 1. P4CR** y **1. C3TR** dan 11, 2 y 5 series, respectivamente. Si se mueve el caballo a 3TR en el primer movimiento, un peón tendrá que avanzar dos casillas en el segundo; también puede avanzar una, pero en este caso las negras proseguirán **2. ..., P5AR.** Y así, el enroque corto produce 2 · 18 = 36 series.

El largo produce más series; sea la continuación **1. P4D, P4R; 2. A3R; P×P; 3. C3TD, P×A; 4. D×P, R×D; 5. 0-0-0+.** Las blancas pueden hacer sus tres primeros movimientos en otro orden: **1. P4D, 2. C3TD** y **3. A3R,** y las negras mover el peón AD en vez del R; por lo cual el número de series de esta clase será 3 · 2 = 6. Si las primeras hacen **1. C3AD** en lugar de **1. C3TD,** el alfil de su dama podrá situarse en 4 casillas; de ellas la 3R dará a las segundas 2 posibilidades de tomar con el peón. De ese modo, se tendrán 6 · 5 = 30 soluciones. Las negras pueden asimismo tomar el peón blanco 4D con el caballo de su dama; véase: **1. C3AD, C3AD; 2. P4D, C×P; 3. A6T, C4C; 4. D×P+,** y así sucesivamente. Como las blancas disponen de 2 movimientos con el caballo y de 4 con el alfil, y las negras pueden elegir uno de los 4 saltos de sus caballos en el tercer movimiento sin que impidan el enroque largo de aquéllas, y si se tienen en cuenta las 3 sucesiones de movimientos de éstas, el número de series de esta clase, producidas por el enroque largo, es 6 + 30 + + 96 = 132.

Y la suma total de series de los dos enroques será 36 + 132 = = 168.

9.ª Una solución es, por ejemplo, **1. C3TD, C3AR; 2. C4A, C5C; 3. C6D+, PR×C; 4. C3A, D5T; 5. C5C, D×P** mate. Pues el caballo de la dama tiene 4 recorridos de 3 movimientos para ir a la casilla 6D y el de cada rey 2 recorridos de 2 movimientos para alcanzar respectivamente el punto 5CR, el número de partidas será 4 · 2 · 2 = 16.

10.ª Hay tres clases de soluciones:

a) **1. X5TR, X5AD; 2. X5R, D4T; 3. D4C, D×X2D+; 4. C×D, X5D; 5. D×A** mate, igual a una partida.

b) **1. X5CD, X5TD; 2. X5R, X5TR; 3. D5T, X5CR; 4. A4A, T4T; 5. A×X2A** mate, igual a 4 partidas, por cuanto las negras también pueden hacer **2. ..., T4T** y **4. ..., T1T** o **1. ..., X5TR** y **2. ..., X5-4T** o **2. ..., X5TD.**

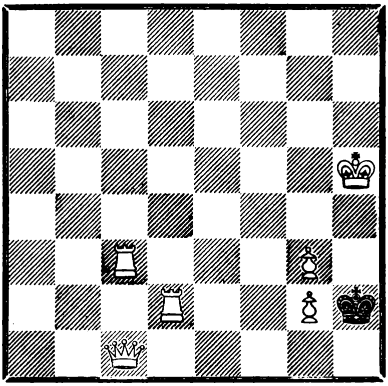
c) **1. X5CD, X5TD; 2. X5R, X5CR; 3. D×X5CR, X5AR; 4. D1D, X5AD** (o 4. ..., T4T); **5. D5T** mate, igual a 12 partidas, pues el bando negro cuenta con otras diez series de movimientos: X5AR, X5CR, X5TD y X5AD (o T4T); X5AR, X5CR, X5TR y T4T; X5CR, X5TD, X5AR y X5AD (o T4T); X5CR, X5AR, X5TD y X5AD (o T4T); X5CR, X5AR, X5TR y T4T; X5CR, X5TR, X5AR y T4T, y X5TR, X5CR, X5AR y T4T.

Por tanto, el número de partidas será $1 + 4 + 12 = 17$.

EL AJEDRECISTA Y LA CALCULADORA ELECTRONICA

¿Cuánto tiempo se necesitará para solucionar este problema de A. Kraemer? [1]: las blancas juegan y dan mate en dos movimientos (diagrama 4).

Diagrama núm. 4



La calculadora electrónica München PERM lo soluciona en nueve segundos. Basta perforar la serie de notaciones B: R5TR, P2CR, P3CR, T3AD, T2D y D1AD; N: R7T en la cinta (los perforadores tienen solamente letras mayúsculas), ponerla en el mecanismo receptor y pulsar un botón. Transcurridos nueve segundos empiezan a funcionar los tipos de una máquina de escribir, acoplada a la calculadora, y escriben el siguiente texto: "Mate en dos, mediante **1. T8A.**"

Una calculadora electrónica moderna de programas dirigidos, conocida más comúnmente por "cerebro electrónico", puede ser utilizada para solucionar problemas de ajedrez clásicos. En ello se emplea el simple principio de ensayar sistemáticamente las combinaciones de movimientos propuestos; principio que T. Nemes, ingeniero jefe del centro de investigaciones del Servicio

[1] "Deutsche Tageszeitung" (1922).

Postal húngaro de Budapest, ya describió en el año 1949[2]. Su idea consiste en construir una máquina para solucionar problemas de dos movimientos; consta de cinco partes principales, cada una de las cuales sirve para efectuar un movimiento determinado; a saber: el primero de las blancas, el primero de las negras, el segundo de las blancas con el que se da jaque o mate, el segundo de las negras en el que no se puede evitar el jaque o el rey se sitúa en una casilla ocupada por una pieza blanca y, finalmente, el tercero de las blancas con que se toma al rey adversario, si se le ha dado jaque mate. Por consiguiente, se hacen dos movimientos más de los necesarios para dar mate, pues así se comprueba que el rey no puede salvarse de las piezas que lo amenazan.

Tras lo cual, la máquina revisa una por una todas las combinaciones que se pueden hacer con estos cinco movimientos. Si se da mate con el tercero de las blancas, hace otras tres con éstas y varía el segundo de las negras; tras esto, vuelve a ensayar los terceros movimientos de las blancas hasta que se presenta otro movimiento con el cual se puede dar mate. Si en cada segundo movimiento de las negras el rey de éstas no puede salvarse de las piezas que lo amenazan, se variará el primero de ellas; por el contrario, si su rey no está amenazado, se variará el tercero de las blancas, y así sucesivamente.

Dicha máquina ofrece numerosos pormenores, esquemas y mecanismos adecuados para atender debidamente a los casos de movimientos poco frecuentes, como enroque, captura de un peón al paso y conversión de peones, que pueden presentarse en el proceso de la solución de un problema.

Pero el sin fin de posibilidades que ofrecen las calculadoras electrónicas han hecho innecesaria la construcción de la máquina ideada por Nemes. Pues basta presentar un problema de ajedrez, incluido el esquema de Nemes u otro cualquiera, a uno de estos ingenios modernos y darle las instrucciones oportunas para que lo "lea", lo resuelva y dé la solución en una forma u otra. En tal caso, se dice que la calculadora "imita" la máquina del ingeniero Nemes.

En muchos países ya se han confeccionado programas de esta índole; a modo de ejemplo, intentaremos describir uno hecho a propósito para la calculadora PERM; con él se han resuelto, efectivamente, muchos problemas de ajedrez a partir de octubre de 1962.

Al objeto de tener una idea concreta de tal programa, por lo demás muy sencillo, permítasenos no hablar de ajedrez, sino de

---

[2] Se publicó en la revista "Müegyetemi Közlemények".

la naturaleza de la calculadora electrónica, con el fin de conocer lo que este ingenio es capaz o incapaz de hacer.

En esta breve iniciación, la parte principal de la máquina es aquella en que se oprime un botón y quedan depositados los datos necesarios para el desarrollo del programa; esto es: el llamado almacenador de datos, o memorizador, que consta de muchas casillas numeradas. La PERM tiene, aproximadamente, 10.000 casillas; en cada una se puede almacenar una dato determinado o, lo que es igual, una orden, o una cantidad para cierto cálculo; la máquina está construida de tal forma que el almacén de cada casilla cumple rigurosamente y por turno las correspondientes órdenes cuando se ha llenado de cantidades y datos y se ha puesto en funcionamiento.

Una media docena de casillas-almacén pueden enlazar aritméticamente las cantidades almacenadas en ellas; por ejemplo: hallar el producto de las mismas. Tales casillas se denominan registros; esto quiere decir que el mecanismo calculador no puede funcionar directamente con cualquier casilla llena de cifras, sino con las cifras que se hallan en ciertos registros. Veámoslo: si se quiere hallar el producto de *a* por *b*, primero habrá que trasladar estas dos cantidades al registro pertinente.

Para conocer la clase de las diversas órdenes que el mecanismo calculador puede cumplir y la realización del proceso circulatorio de un programa, veamos uno de extensión reducida. Las órdenes se dan según un código de guarismos y letras convencionales; pero aquí las expresaremos en el lenguaje común, para hacerlas comprensibles al entendimiento.

Ejemplo: Sea la suma de 1.000 cifras la que se debe calcular; previamente se perforan en la cinta, para que la máquina pueda "leerlas". El proceso del programa en cuestión será más o menos así:

1) Póngase el registro-índice en el número 1.000.
2) Póngase el registro número 1 en el 0.
3) Llévese una de las cifras (taladradas en la cinta) al registro número 2.
4) Súmese el contenido del registro número 2 con el del número 1, y llévese de nuevo el resultado al registro número 1.
5) Disminúyase en 1 unidad el número del registro-índice.
6) Retrocédase a la orden número 3, en caso de que el contenido del registro-índice resulte positivo.
7) Imprímase el contenido del registro número 1.
8) Stop.

En la técnica de la programación, la orden número 6 es una "orden refluente condicionada", particularmente típica, y hace que lar órdenes números 3, 4, 5 y 6 se cumplan exactamente mil veces.

Este ejemplo, sumamente sencillo, basta para poder distinguir algunas partes fundamentales de la programación. Las órdenes sueltas son por sí mismas sencillas; en este lugar conviene insistir en la siguiente circunstancia: la calculadora electrónica no es inteligente, sino laboriosa, sumisa e ignorante. Lo cual, Marshall H. Wrubel ha formulado acertadamente: "If you say 'sit' he (the computer) will sit whether there is a chair or not"[3]. Dicho de otro modo: si una serie de órdenes exige que el contenido de la casilla número 1 se multiplique por el de la número 2, ambos contenidos se multiplicarán, aunque dichas casillas contengan órdenes dadas en el lenguaje común y no cifras. Por eso, la máquina comete disparates totalmente contrarios a lo proyectado cuando el programa contiene un error, por insignificante que sea.

Pues se tiene ya una somera idea de la clase de órdenes con que se confeccionan los programas, véase cómo se confecciona uno de ajedrez. Aunque brevemente, conviene primero aclarar la función que el programa desempeña, o sea, lo que se recopila y se imprime: trátese, por ejemplo, de solucionar el problema de A. Kraemer, reflejado en el diagrama número 4. Si se taladra una serie de notaciones arbitrarias en la cinta y se coloca en el mecanismo receptor, se pueden obtener estos cinco resultados:

1) La petición contiene errores.
2) El problema es indefinido porque se da jaque a las negras.
3) Mate en una jugada, mediante...
4) Mate en dos jugadas, mediante...
5) El problema es insoluble.

El último resultado se obtiene cuando no es posible dar mate antes de tres movimientos.

Seguidamente trataremos de la composición del programa para solucionar problemas de dos movimientos; el procedimiento que se sigue para resolver los de tres y más movimientos, los de tablas por rey ahogado, los de automate, etcétera, exigen modificaciones relativamente pequeñas.

---

[3] Si se le dice "siéntate", ella (la calculadora) se sentará haya o no una silla.

El programa se puede, naturalmente, dividir en las siguientes partes e indicar el número de órdenes correspondientes a cada una de ellas, para señalar la relativa dificultad que entrañan dichas partes:

Parte generadora			14
Programa de lectura			154
Programa de dirección			270
Programa de exploración			295
Programa de impresión			63
Léxico de movimientos	Un peón blanco	153	1.030
	Un peón negro	141	
	Una coronación	32	
	Un caballo	118	
	Una torre	95	
	Un alfil	121	
	La dama	2	
	El rey blanco	196	
	El rev negro	172	
Casillas auxiliares			193
Total			2.019

La parte regeneradora

Es la menos interesante en el proceso de la solución del problema y, por ello, no nos detendremos en describirla. Tiene por objeto procurar que cada casilla recupere su contenido primitivo, pues varía en cierto modo durante el programa; esto excusa tener que introducirlo varias veces en la máquina cuando hay que resolver cierto número de problemas. De consiguiente, esta parte facilita la solución de toda una lista de los mismos; por ejemplo: los que integran un torneo de composiciones ajedrecistas.

El programa de lectura

Para poder calcular del todo una posición según cierto algoritmo, primero es necesario interpretarla resumidamente en la máquina, o sea, almacenarla en ella; el procedimiento interpretativo más inmediato y conveniente es el uso de las sesenta y cuatro casillas-almacén dispuestas correlativamente, de suerte que cada una de ellas tenga correspondencia con una del tablero de ajedrez. Así que una pieza ocupe cierto escaque, su correspondiente casilla-almacén tendrá una cifra. Por consiguiente. aquellas casillas que se correspondan con los escaques desocupados estarán representadas por un 0, un peón blanco lo estará por + 1, uno negro por — 1, y así sucesivamente. El programa de lectura se encarga de interpretar una serie de signos dada en la representación interior de la posición; esto es: lee uno por uno los signos y les da otro significado para poder formar la imagen interior de la posición. Al propio tiempo comprueba si la serie de signos recopilada expresa cabalmente la posición de ajedrez dada; en caso contrario, si hay, por ejemplo, peones en la octava horizontal de cada bando o si las negras tienen tres reyes o un caballo y una dama situados en una misma casilla, la calculadora imprime la antedicha expresión, "la petición contiene errores", y se para.

El programa de comprobación

Esta parte se puede considerar como el centro del programa general, por cuanto dirige el proceso calculatorio de la solución del problema, y actúa así que el de lectura ha recopilado los datos de la posición y la ha formado interiormente. Lo mismo que el proyectado por el ingeniero Nemes, este algoritmo ensaya sistemáticamente los movimientos de cada combinación hasta comprobar cuál movimiento de las blancas ocasiona el mate y cuál no lo ocasiona. Las otras partes del programa general, como el de exploración, el de impresión y el léxico de los movimientos, son auxiliares del de dirección y se les conoce por el nombre de "subprogramas".

El programa de exploración

Examina si una pieza determinada ataca determinada casilla. Por un lado, esto permite siempre comprobar si se da jaque a uno u otro bando, lo cual evita comprobarlo sistemáticamente y, al contrario del aparato ideado por Nemes en el cual se toma eventualmente el rey negro al quinto movimiento, comprueba varias veces un tercer movimiento de las blancas en el caso de que se dé jaque con él. Por otro lado, esta parte del programa es indispensable para los cuatro enroques, cuya admisibilidad de los movimientos verifica el léxico. Es obvio señalar que las blancas, por ejemplo, no pueden enrocar corto cuando su casilla 1AR está amenazada por las piezas negras. Y, finalmente, escudriña, con orden y en forma de haz de rayos divergentes, si hay piezas adversarias en las inmediaciones de una casilla dada, es decir, si ésta se halla a tiro de un rey, de una dama, de una torre, etcétera.

El programa de impresión

Con su ayuda se puede imprimir en letras usuales el movimiento considerado como la solución del problema. Pues no serviría de nada el cálculo hecho por la máquina si ésta lo reservase para sí y no lo exteriorizase.

El léxico de los movimientos

Esta extensa parte del programa sirve para descubrir los movimientos realizables en una posición determinada. No detallaremos su estructura; nos limitaremos a decir que cada pieza de ajedrez está sujeta a una sección del léxico.

Sólo referiremos a modo de ejemplo lo que éste debe averiguar antes de establecer si un caballo puede avanzar hacia el nordeste, es decir, si puede aumentar respectivamente en 2 y en 1 el número de espacios horizontales y verticales de la posición que ocupa. Veámoslo:

1) ¿Es menor que 7 el número de espacios horizontales de la casilla de salida?

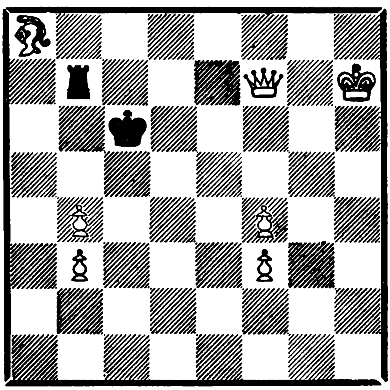
2) ¿Es menor que 8 el número de espacios verticales de la casilla de salida?

3) ¿Hay alguna pieza contraria en la casilla a donde el caballo debe dirigirse?

El movimiento del caballo en cuestión es realizable cuando se puede responder afirmativamente a estas tres preguntas.

En la toma al paso y en el enroque efectuados con el movi-

Diagrama núm. 5



miento fundamental del problema, la calculadora no puede verificar las consideraciones retroanalíticas necesarias, porque el léxico de los movimientos debe ceñirse forzosamente a verificaciones muy simples. Por eso, la máquina puede cometer errores en la solución de problemas de dos movimientos cuando el contenido de éstos es retroanalítico.

Este problema se debe a K. Fabel [4]: las blancas juegan y dan mate en dos. Lo proponemos con el fin de que el lector confronte sus aptitudes para hallar rápidamente la solución de problemas con las de la calculadora electrónica. Este se compuso para comprobar si la máquina trabaja perfectamente cuando las negras limitan la movilidad de la pieza blanca que ocasiona el mate. A los diez segundos, la PERM imprimió: **1. D7R.**

Pero el tiempo que requiere la solución de un problema depende de las particularidades de la posición y suele ser mayor que el requerido para resolver los sencillos ejemplos reflejados en los diagramas 4 y 5. La máquina emplea cinco minutos en hallar la solución de los modernos y complicados problemas en dos jugadas que se publican en las revistas de ajedrez; en tal espacio de tiempo ha demostrado que puede imprimir convenientemente todas las soluciones, que es capaz de resolver cualquier problema, lo mismo que el hombre y que hay sólo soluciones impresas. Tal capacidad da valor práctico al programa, aun cuando se carezca de la gran satisfacción que experimenta el ser humano al descubrir el contenido estético e intrínseco de un problema de ajedrez.

El asunto es más complicado cuando se intenta dotar a la calculadora electrónica de un programa para jugar una partida de ajedrez y hacer de ella un jugador eficiente. Sobre este tema se publicó una serie de trabajos en el período inmediato a la terminación de la segunda gran guerra. El más interesante de ellos, titulado "Computer vs. Chess-Player" [5], se debe a los autores Alex Bernstein y Michael de V. Roberts.

El sistema de su programa permite a la calculadora sopesar todas las posibilidades, tanto ventajosas como desventajosas, que ofrece cualquier posición. Primero, comprueba qué casillas están ocupadas, quién las ocupa, cuáles están amenazadas y defendidas y cuáles se podrán ocupar; después, entresaca los siete movimientos que estima "mejores" y, por último, hace las siguientes preguntas:

1) ¿Se da jaque a mi rey? Si es así, ¿puedo comer la pieza que lo da o protegerlo o retirarlo a una casilla segura?

---

[4] "Heidelberger Tageblatt" (1964).
[5] "Scientific American", págs. 96-105 (junio de 1958).

2) ¿Es posible efectuar un cambio de piezas? Si lo es, ¿me reportará alguna ventaja material o debo retirar mi pieza?

3) ¿Puedo enrocar?

4) ¿Tengo posibilidades de movilizar una pieza menor?

5) ¿Hay una columna abierta que pueda yo ocupar?

6) ¿Puedo situar una pieza en un punto crítico, producido por una cadena de peones?

7) ¿Me es posible adelantar un peón?

8) ¿Puedo mover una pieza?

Al comienzo de la partida, se puede contestar afirmativamente a las preguntas cuarta, séptima y octava, pues el programa reduce los 20 movimientos, con que cuenta cada bando, a 7; esto es: los 4 de los caballos y los 3 del peón (P4R, P3R y P4D). A estas 7 preguntas se responderá con los 7 mejores movimientos, a los que se contestará con otros 7 mejores movimientos, y a éstos se replicará con otros 7 mejores movimientos; de consiguiente, habrá que analizar unos 2.400 de ellos.

En el análisis de la última serie de 7 movimientos, el programa comprueba cuál de ellos es más ventajoso para el contrincante; este análisis se realiza de acuerdo con los siguientes puntos:

1) Ganancia material (P = 1; A o C = 3; T = 5, y D = 9).

2) Defensa del rey.

3) Movilidad de las piezas.

4) Posesión de los escaques más importantes

El valor del mejor de los 7 movimientos últimos se asigna al movimiento que lo haya precedido. De esta manera, se obtiene el valor de cada uno de los movimientos precedentes; la calculadora prosigue en ese orden el análisis hasta elegir el movimiento que estima conveniente, teniendo en cuenta el mejor que puede hacer el contrincante.

Sus autores lo ensayaron varias veces en una IBM 704 que invirtió, por lo general, ocho minutos en analizar 7^4 continuaciones; pero necesitaba quince minutos cuando el número de continuaciones era 8^4.

La "respuesta" de la calculadora se produce por impresión de un diagrama que representa la nueva posición; caso de que ésta contenga un movimiento contrario a las reglas del juego, la máquina imprime la siguiente expresión: "Please check last move!"[6].

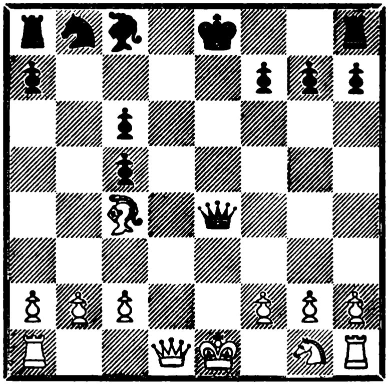
En definitiva, puede decirse que el programa de dichos autores ofrece a la IBM 704 la posibilidad de elegir, cual un maestro, los

[6] ¡Sírvase comprobar el último movimiento!

movimientos convenientes y a propósito para una posición determinada, no obstante no pertenecer a la categoría de los maestros. Veamos un caso:

En esta posición, la calculadora electrónica optó por responder con D2R; respuesta a la que no se puede oponer reparo.

Diagrama núm. 6



El programa que nos ocupa refleja no sólo al maestro Bernstein sentado a la calculadora resolviendo un problema, sino también una partida de ajedrez en la cual ésta jugó con blancas y la perdió. Véase:

1. P4R, P4R; 2. A4A, P3CD; 3. P3D, C3AR; 4. A5CR, A2C; 5. A×C, D×A; 6. C3AR, P3A; 7. 0-0, P4D; 8. P×P, P×P; 9. A5C+ (este ingenio desarrolla adecuada y oportunamente la apertura), **C3A; 10. P4A** (era mejor haber proseguido 10. C×P, pues a 10. ..., D×C habría sucedido 11. T1R; pero la máquina lo estimaría una pérdida material), **P×P; 11. A×C+, D×A; 12. P×P** (aquí procedía jugar 12. T1R), **P5R; 13. C5C, D3C; 14. C3TR, P6R; 15. P3A, A4A; 16. T1R, 0-0; 17. C3A** (la evolución de este caballo hace que las blancas pierdan la partida), **P7R+; 18. C2A, A×P; 19. P3CR, P×D=D; 20. C3A×D, D7A; 21. P3C, T1T1D; 22. P4TR, T×C.**

Y la calculadora se rindió, porque el mate es inevitable.

Este programa tiene un defecto: en el medio juego se observa cierta tendencia a no defender las piezas amenazadas, sino a retirarlas. Sería interesante ensayarlo en una partida con un ajedrecista sin experiencia; pero hasta la fecha no se ha publicado ningún trabajo en tal sentido.

Newell, Shaw y Simon confeccionaron un programa para la calculadora ajedrecista, y lo publicaron con el título "Chess-Playing Programs and the Problem of Complexity" [7]; es esencialmente más complejo y tiene, sobre todo, relación con trabajos de Shannon [8], Turing y Kister, publicados con anterioridad. Sus autores lo han ensayado en un tablero normal y en uno de 6 × 6 casillas, considerando todos los movimientos practicables, y han ampliado el método de Bernstein, cuyo programa acabamos de ver, consistente en la selección de movimientos fundada sobre el análisis y valoración de la posición. Nos limitaremos a esbozar esta idea.

Lo fundamental de su programa es investigar toda posición según estos seis aspectos:

1) Seguridad del rey.
2) Equilibrio material.
3) Dominio del centro.
4) Desarrollo de las piezas.
5) Ataque al flanco de rey.
6) Conversión de peones.

El análisis de la posición clasifica, según su importancia y partiendo del más oportuno, los aspectos indicados en una serie determinada; serie que se encarga de verificar el siguiente programa. A cada aspecto le corresponde un subprograma, denominado generador de movimientos, y cuyo objeto es proponerle los movimientos que más le convengan. Por ejemplo: el generador de movimientos correspondiente al aspecto "dominio del centro" puede proponer P4D (blancas) como un buen movimiento de apertura; por el contrario, en la misma posición, el correspondiente al "equilibrio material" propondría retirar una pieza amenazada.

Los diversos generadores de movimientos se juntan entre sí formando otro subprograma, el cual valora las posiciones formadas por los movimientos propuestos y, por lo mismo, considera diversos aspectos. El valor dado a un movimiento se deduce de los distintos valores que corresponden a cada uno de los aspectos.

La valoración "estática" de una posición, hecha desde un aspecto determinado, sólo tiene sentido si aquélla es "indefinida" con respecto a éste, o sea, si no hay ningún movimiento que pueda modificar fundamentalmente el valor estático. Por ejemplo: primero habrá de producirse un cambio de piezas antes de que la posición referente al aspecto "equilibrio material" se pueda considerar "indefinida".

---

[7] "IBM-Journal of research and development", págs. 320-335 (1958).
[8] "Scientific American", págs. 48-51 (febrero de 1950).

Por ello, a cada aspecto le corresponderá un "generador de comprobaciones" o, lo que es lo mismo, un subprograma que compruebe el número y la amplitud de las continuaciones que se analizan. Toda continuación se analizará mientras no se forme una posición "indefinida", a la cual se le pueda dar valor estático. Para fijar las ideas ejemplifiquémoslo:

Sea la posición P_1 que se debe analizar; el generador de movimientos propone al bando blanco (a la calculadora electrónica en este caso) el movimiento *a*, que produce una nueva posición P_2. Al valorar P_2, el subprograma determina que en esta posición se han de considerar tres de los aspectos en cuestión; con dos de ellos se logra una valoración estática, y con el tercero se establece que la posición todavía no es "indefinida". Por ello, el generador de comprobaciones promueve la investigación de dos continuaciones, es decir, de los movimientos *b* y *c* de las negras que producen las posiciones P_3 y P_4. En la P_3, el programa de valoraciones determina que esta posición es "indefinida" con respecto a todos los aspectos referidos y, por lo mismo, se le puede dar valor estático. En cambio, en la P_4 sólo un aspecto da valor estático, mientras los otros dos se han de continuar analizando.

De consiguiente, el generador de comprobaciones promueve otras dos continuaciones *d* y *e* de las blancas que, partiendo de la posición P_4, forman las nuevas posiciones P_5 y P_6, las cuales son ahora "indefinidas" en cuanto a los aspectos que las han originado y, por eso, son valorables. Para valorarlas, el subprograma pertinente elige el movimiento más valioso entre los *d* y *e*, en virtud de la valoración de las posiciones P_5 y P_6; por ejemplo, el *e*. Este valor se dará a P_4. Ahora, las negras pueden elegir entre los movimientos *b* y *c*, que han producido las posiciones P_3 y P_4. El subprograma elige para las blancas el movimiento menos ventajoso; por ejemplo: el *b*. De ese modo se obtiene el valor de la posición P_2, o sea, del movimiento *a*, que ha conducido de P_1 a P_2.

La elección definitiva del movimiento, que debe efectuar realmente la máquina, se puede hacer a través de diversos programas, procurando que éstos se puedan compensar unos con otros como sucede en la valoración estática durante el análisis de las ventajas y desventajas de un movimiento y como lo prevé Bernstein en programas anteriores. Pero los autores citados prefieren establecer una norma mínima irreducible y dejar que el programa elija el primer movimiento que alcance dicha norma, considerando todos los aspectos ordenados según su importancia. También se tiene previsto un programa en que se elija el movimiento que alcance la norma y, al propio tiempo, sea elegido por más de un generador de movimientos.

Este programa resulta muy complicado y teórico; pero la verdad es que sus autores lo habían desarrollado parcialmente cuando lo publicaron en la citada revista y, por ello, aún no lo han ensayado en la calculadora electrónica, pues estiman que la máquina invertiría de una a diez horas en analizar cada movimiento. ¡Siendo así, el ingenio electrónico no puede participar en ningún torneo!

En cambio, el programa de Bernstein permite terminar una partida dentro de un tiempo razonable, debido a que la calculadora invierte ocho minutos en el análisis de cada movimiento y a que comete un error tras una serie de movimientos determinada. Lo lamentable es que, contrariamente a todo jugador ducho, no sólo no aprende en sus errores, sino que los comete siempre en posiciones idénticas. Habría que intentar componer un programa, con el cual la máquina pudiese acumular experiencia y mejorar la calidad de su juego.

Esta idea puede llegar a realizarse. Cuanto más que Samuel tiene publicado un trabajo con el título *Machine Learning using the Game of Checkers*" [9], en el cual refiere haber intentado que la calculadora electrónica jugase a las damas. ¡Según sus datos, la máquina se puede equipar con un programa, de modo que juegue mejor que el autor al cabo de ocho o diez horas de juego! Por su complejidad, puede el ajedrez oponer indudablemente cierta resistencia a tales intentos.

R. Bellman estima que alrededor de 1975 las calculadoras electrónicas podrán ejecutar partidas de damas y finales de partidas de ajedrez [10].

M. Euwe es más pesimista en este sentido cuando dice: "La calculadora electrónica nunca aventajará a un buen principiante" [11].

Varias revistas informaron, no sin ciertas contradicciones, sobre un encuentro de ajedrez entre una calculadora estadounidense y otra soviética. La Unión Soviética ganó por tres a uno. Veamos un fragmento de una de las partidas de dicho encuentro [12] (ver diagrama 7):

URSS (blancas) y EE. UU. (negras): **1. ..., C4C; 2. P4TR, P3AR; 3. P×C, P×PC; 4. T×P!, T1A; 5. T×P, P3A; 6. D6D, T×P; 7. T8C+, T1A; 8. D×T** mate.

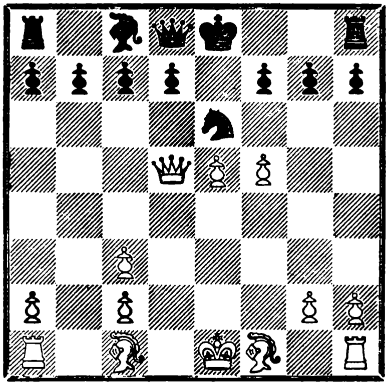
---

[9] "IBM-Journal of research and development", págs. 210-229 (1959).
[10] "Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA" (1965).
[11] "Umschau (1968).
[12] "Deutscher Schachzeitung" (abril de 1966).

Al hacer C4C, el programa norteamericano no advirtió que el caballo no tendría ninguna casilla libre adonde poder retirarse; en cambio, el soviético se mostró más precavido.

Volvamos al problema de ajedrez. El programa para la PERM que hemos comentado en este capítulo, y cuyo autor es C. Bandelow, se practicará en adelante para ensayar problemas de dos jugadas en Munich.

Diagrama núm. 7



K. Fischer y H. J. Schneider han confeccionado un programa para solucionar problemas de tres movimientos, el cual emplea la cátedra de Matemáticas de la Escuela Superior de Artes y Oficios, de Stuttgart [13].

H. Mertes también compuso un programa para solucionar problemas de más de dos jugadas e hizo la siguiente prueba: presentó la posición C3AD (blancas) y C3AR (negras), en que indudablemente son tablas, a una calculadora electrónica y le encargó que diese mate en una, dos, tres, cuatro, cinco y seis jugadas. La máquina respondió que el problema era insoluble tras 0,04, 0,08, 0,38, 2,69, 19,37 y 141,64 segundos, respectivamente. Como se ve, el tiempo invertido en calcular aumentó unas siete veces a partir de las tres jugadas. Esto da idea del tiempo que se invertiría en la resolución de un problema con mayor número de piezas y jugadas.

Las calculadoras electrónicas pueden no sólo solucionar pro-

---

[13] Véase el diagrama de un sencillo problema de tres jugadas, en cuya solución se dan seis minutos y cincuenta y seis segundos, el cual se publicó en "Bild der Welt", pág. 369 (1967).

blemas, sino también componerlos Lo cual se desprende de un extenso artículo, cuyo autor es G. Rinder [14]. Se trata de uno de la conocida clase de problemas "mínimos" que constan de muchos movimientos y en los que la dama blanca obliga al rey negro a dirigirse lentamente hacia el escaque, donde se le dará mate. En colaboración con H. Müller, se logró dar mate en treinta y dos movimientos; fue el problema más extenso y preciso con la variante principal doblemente continua e independiente.

[14] "Schwalbe" (febrero de 1970).

LA MOVILIDAD DE LAS PIEZAS DE AJEDREZ

En las operaciones de cambio que se producen en el transcurso de la partida, el jugador advertido procura eludir toda pérdida material. El cambio de una torre por otra no altera el equilibrio de las fuerzas, aun cuando ello mejore, hasta cierto punto, la posición o la empeore. Por el contrario, dar una torre por un caballo vale tanto como perder la calidad y, por ende, hacer una jugada desventajosa.

El número de las operaciones de cambio realizables es considerable y, en ciertos casos, cuestionable determinar qué bando ha sacado ventaja: el que da dos torres por la dama, el que da una torre por un alfil y dos peones o el que, voluntaria o involuntariamente, tiene que conformarse con la torre a cambio del alfil y los dos peones citados. De aquí que se haya establecido una escala de valores, en la cual se toma como unidad el peón:

$$P = 1;\ C = 3;\ A = 3;\ T = 5 \ \text{ y } D = 9.$$

Los hay que prefieren una de las dos escalas siguientes:

$$P = 1;\ C = 3;\ A = 3{,}5;\ T = 5{,}5 \ \text{ y } D = 10$$

o bien:

$$P = 1;\ C = 3{,}5;\ A = 3{,}5;\ T = 5{,}5 \ \text{ y } D = 10.$$

Estos diversos sistemas de valoración ofrecen un buen dato para conocer, por ejemplo, que la dama vale más que la torre y una pieza menor juntas, sea alfil o caballo, y que la diferencia entre las dos últimas, llamada calidad, es equivalente al valor de dos peones. Como se ha dicho, aquí no se consideran el mejoramiento ni el empeoramiento de la posición. Igualmente, se ha aprovechado la "movilidad media" para medir el poder de una pieza, en lo cual debe sobreentenderse que la suma de los movimientos de ella se ha de dividir por el número de casillas del tablero.

Sin tener en cuenta los enroques puede el rey ejecutar 420 movimientos diferentes en el tablero normal, o sea, en el de 8 × 8 escaques, y las otras piezas ejecutan: D = 1.456; T =896; A (de casillas blancas o negras) = 560; C = 336, y P = 140; en ello no se valoran por separado las transformaciones de peones. Por tanto, se tienen 3.808 movimientos diferentes. Esta cifra, no muy elevada, muestra que muchos movimientos resolventes se repiten con relativa frecuencia, particularmente con ciertas piezas, en la solución de problemas o en el estudio breve de las reseñas de soluciones.

Dividiendo cada uno de estos valores por 64, se obtiene la movilidad media de cada pieza:

P = 2,18; C = 5,25; A = 8,75; T = 14; D = 22,75 y R = 6,56.

Si se vuelve a tomar el peón como unidad comparativa, para mejorar los valores arriba citados, se tendrán los siguientes resultados:

P = 1; C = 2,4; A = 4; T = 6,4; D = 10,4 y R = 3.

En esta escala de valores sorprende que el valioso rey valga un poco más que un caballo; pero como no es una pieza trocable, ¡a no ser que se juegue al ganapierde!, aquí podemos no considerar su "valor".

También sorprende que el valor del alfil, de la torre y de la dama no guarde proporción con el del caballo. Esta circunstancia se debe atribuir a que las líneas de las piezas de mayor movilidad casi siempre están parcialmente interceptadas por piezas propias y ajenas en una partida práctica; y así, su movilidad media no tiene el valor que realmente se le ha dado. Por ello, si al valor del alfil, de la torre y de la dama se le resta aproximadamente un tercio, se obtendrán resultados más aproximados a las proporciones reales:

A = 2,7; T = 4,3 y D = 7.

Pero como suma de torre más alfil, a la dama se le da poco valor, lo cual se explica fácilmente: en ciertos casos, el alfil tiene acceso a la mitad de las casillas de su recorrido, mientras la dama puede, en cualquier momento, variar el color de las que recorre y, por eso, ha de tener más valor que una torre y un alfil juntos, o sea, el de estas dos piezas más 1,5 aproximadamente. Considerada también esta corrección, se tendrá:

P = 1; C = 2,4; A = 2,7; T = 4,3 y D = 8,4.

La suma de los movimientos realizables por cada pieza (R = = 420, D = 1.456, T = 896, A = 560, C = 336 y P = 140) en un tablero normal es, entre otras cantidades, divisible por 7; cifra que expresa el número de casillas menos una del lado del tablero.

Las siguientes fórmulas sirven para determinar el máximo número de movimientos que una pieza puede efectuar; en ellas se observa una regularidad general, y se designa por n la longitud del lado del tablero:

$$R = 4\ (2n - 1)\ (n - 1)$$
$$D = 2/3\ n\ (5n - 1)\ (n - 1) = T + A$$
$$T = 2n^2\ (n - 1)$$
$$A = 2/3\ n\ (2n - 1)\ (n - 1)$$
$$C = 8\ (n - 2)\ (n - 1)$$
$$P = (3n - 4)\ (n - 1),\ \text{a partir de } n = 4.$$

Todas estas fórmulas tienen el factor $n - 1$; por tanto, otros tableros de $n \times n$ casillas deberán tener esta condición de divisible. La tienen, en efecto; pero con algunas excepciones: en el caso del alfil y, por lo mismo, en el de la dama, el factor 2/3 impide que se cumpla con dicha condición cuando $n - 1$ es 3 o un múltiplo de 3; esto es, cuando el lado del tablero tiene 4, 7, 10, etcétera, casillas de longitud.

La fórmula para el alfil comprende tanto los movimientos efectuados en los escaques blancos como en los negros, aunque estos dos valores no son iguales en tableros cuyos lados sean de 3, 5, 7, 9, y así sucesivamente, casillas de longitud, pues, cuando el área de las mismas se aumenta una casilla (número impar), el número de movimientos es

$$Ai = 1/3\ (n - 1)\ (2n^2 - n + 3)$$

y cuando se disminuye una casilla (número par) es

$$Ap = 1/3\ (n^2 - 1)\ (2n - 3).$$

Con fórmulas análogas se halla el mayor número posible de movimientos, que las diversas piezas imaginarias pueden ejecutar; por ejemplo: para el saltamontes, pieza que camina como la dama, puede saltar sobre una pieza que esté sentada en el camino de ella y situarse detrás de la misma, se tiene esta fórmula:

$$S = 2/3\ (n - 1)\ (n - 2)\ (5n - 3) = D - R.$$

K. Fabel[1] halló también una fórmula general para casi todos

[1] La publicó en la revista belga "Sphinx" (abril de 1933).

los "saltamontes" y "caballeros" del sistema de figuras imaginarias de Dawson [2]. Veámosla:

$$C(x,y) = r \sum_{t=1}^{\left(\frac{n-1}{x}\right)} (n - tx)\ (n - qtx).$$

En ella, x e y ($x>y$, $y = qx$) son las coordenadas del escaque, adonde el caballero C(x,y) se dirige desde el punto de intersección 0/0 de las mismas, haciendo los movimientos más cortos. En el caso del "caballero nocturno", pieza que se mueve por las líneas del caballo, aunque su recorrido es más largo y, por ello, vale 1,2 veces más que éste y 2,1 veces más que el caballero, se tendrá $x = 2$, $y = 1$ y $q = 1/2$. Por n se designa el lado del tablero cuadrado, por r el número de direcciones en que puede moverse el caballero. Ejemplo: si en el caso del "caballero nocturno" r es igual a 8, en el del alfil será igual a 4. El paréntesis puesto sobre el signo de la suma significa que se considerará sólo el cociente de dividir $n - 1$ por x, despreciándose el resto si lo hubiere; véase: cuando n sea igual a 8 y x igual a 2, su valor será 3. Por tanto, el "caballero nocturno" puede hacer a lo sumo 608 movimientos en el tablero de 8 × 8.

Si se ha de calcular el número de movimientos de un "saltón", es decir, de una pieza que puede hacer solamente un movimiento simple en cada dirección, como el rey, el visir o el caballo normal por ejemplo, entonces t se hará igual a 1 y, por tanto, el signo de la suma quedará suprimido, en lo cual se debe tener presente que el modo de marchar del rey reúne en sí el de dos piezas habituales. En todos los movimientos por el eje de abscisas, el valor de y y el de q serán iguales a cero, por supuesto.

Para completar lo dicho, quisiéramos recordar que, a principios de 1945, E. von Fabrizi planteó de un modo más generalizado el problema del número de movimientos en un estudio titulado "El tablero y las piezas reducidos a la dualidad"; este trabajo requiere un profundo análisis y un vasto conocimiento de las matemáticas. Es lamentable que todavía no se haya publicado.

Las fórmulas antedichas son apropiadas para comparar el tablero normal con otros de mayor o menor superficie. Véase: la torre tiene tantas posibilidades de moverse como una pieza que reúna en sí el modo de marchar del caballo y el del alfil en el

---

[2] Consúltese "Schwalbe" (agosto, octubre y noviembre de 1929).

tablero de 8×8 casillas. ¿En qué otros tableros las tiene? Solamente en uno de 3×3 casillas, donde el alfil, el caballo y la torre tienen respectivamente 20, 16 y 36 posibilidades de moverse. ¿En qué tablero puede el alfil hacer tantos movimientos como el rey? Como las fórmulas para estas dos piezas son iguales, se obtiene $n = 6$; por tanto, esto sucede en uno de 36 escaques, y se producen 220 movimientos diferentes.

Ahora veamos el cálculo de los movimientos dobles: si movemos dos veces consecutivas una pieza en un tablero de cualquier número de casillas (en ello se incluye el retroceso a la posición de salida), se podrá obtener la suma de todos ellos, mediante las siguientes fórmulas:

$$R_2 = 4\ (n - 1)\ (16n - 23)$$
$$D_2 = 1/6\ n\ (67n^3 - 160n^2 + 122n - 32) \text{ si } n \text{ es par}$$
$$D'_2 = 1/6\ (n - 1)\ (67n^3 - 93n^2 + 29n - 3) \text{ si } n \text{ es impar}$$
$$T_2 = 4n^2\ (n - 1)^2$$
$$A_2 = 1/6\ n\ (11n^3 - 32n^2 + 34n - 16) \text{ si } n \text{ es par}$$
$$A'_2 = 1/6\ (n - 1)\ (11n^3 - 21n^2 + 13n - 3) \text{ si } n \text{ es impar}$$
$$C_2 = 8\ (8n^2 - 38n + 43) \text{ a partir de } n = 4.$$

En los movimientos dobles se expresa si la longitud del lado del tablero es un número par o impar. Para que en esta clase de movimientos no figuren los retrocesos, bastará restarle a la suma de los dobles la de los sencillos. Veamos unos ejemplos:

$$R_2 - R = 8\ (7n^2 - 18n - 11)$$
$$T_2 - T = 2n^2\ (n - 1)\ (2n - 3)$$
$$C_2 - C = 8\ (7n^2 - 35n + 41) \text{ a partir de } n = 4.$$

En los movimientos dobles de los peones no hay retrocesos, por supuesto. Y su fórmula es, a partir de $n = 5$,

$$P_2 = 9n^2 - 34n + 28.$$

Las fórmulas y sus deducciones son bastante complicadas para los movimientos triples, los cuales tienen escaso interés, exceptuando los de la torre, cuya fórmula se deduce fácilmente:

$$T_3 = 8n^2\ (n - 1)^3.$$

Por lo cual, veremos sólo un caso particular del alfil y que se debe a K. Fabel [3]: Un alfil marcha por una diagonal; se detiene

[3] "Fairy Chess Review" (agosto de 1959).

en un punto cualquiera de ella; efectúa un segundo movimiento, de modo que forme ángulo recto con la línea que ha recorrido, y, finalmente, ejecuta un tercer movimiento en el mismo sentido del que ha ejecutado primero o en sentido contrario por una diagonal paralela a aquélla. ¿Cuántas series de movimientos triples sucederán en tableros, cuya longitud del lado sea un número par?

$$A_3 = 1/15\ n\ (n - 2)\ (8n^3 - 24n^2 + 22n - 21).$$

Este caso da 8.688 series de movimientos en el tablero normal.

Esta suerte de análisis también es practicable en el ajedrez de tres dimensiones; en él, los escaques se representan por celdillas de forma cúbica, y el juego se desarrolla comúnmente en un cubo de 5 × 5 × 5, el cual tiene, por supuesto, 125 celdillas. Designaremos respectivamente por A, B, C, D y E una base y las cuatro caras del cubo, de modo que una torre situada en Aa1 (T1TD de las blancas) puede trasladarse no sólo a Aa5 (T5TD) y a Ae1 (1R), sino también subir como un ascensor a Ba1, Ca1, Da1 y Ea1.

Un alfil colocado en Aa1 puede recorrer las diagonales de tres superficies diferentes; esto es: ir a Ae5, a Ee1 y a Ea5.

Es fácil ver que el ajedrez de tres dimensiones requiere un "pasilargo" que recorra las diagonales del cubo; tal pieza se llama unicornio y puede ir, por ejemplo, de Aa1 a Ee5.

Y la dama reúne en sí el modo de caminar de la torre, del alfil y del unicornio.

En este tipo de ajedrez, el mayor número posible de movimientos que ejecuta cada pieza se puede deducir de las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} R &= 2\ (n - 1)\ (13n^2 - 14n + 4) \\ D &= n^2\ (n - 1)\ (9n - 4) \\ T &= 3n^2\ (n - 1) \\ A &= 2n^2\ (n - 1)\ (2n - 1) \\ U &= 2n^2\ (n - 1)^2 \\ C &= 24n\ (n - 1)\ (n - 2). \end{aligned}$$

Vemos que en ellas también entra siempre el factor $n - 1$ y que, en el tablero "normal", o sea, cuando n es igual a 5, dan los siguientes valores: R = 2.072, D = 4.100, T = 1.500, A = 1.800, U = 800 y C = 1.440.

Con estas fórmulas se puede resolver una serie de problemas interesante, lo mismo que en el ajedrez de dos dimensiones.

Veámoslo: ¿En qué tablero de $n \times n \times n$ celdillas se producen estas igualdades: 1) T = A; 2) T = C; 3) C = 2U; 4) D = 5U; 5) A = U + 1.000; 6) R = C + 1.000; 7) A = T + C, y 8) 3U = = T + C?

Soluciones: 1.ª n = 2, T = A = 24; 2.ª n = 4, T = C = 576; 3.ª n = 3, C = 2U = 144, y n = 4, C = 2U = 576; 4.ª n = 6, D = 5U = 9.000; 5.ª n = 5, A = U + 1.000 = 1.800; 6.ª n = 6, R = C + 1.000 = 3.880; 7.ª n = 2, A = T + C = 24, y n = 24, A = T + C = 1.245.312; 8.ª n = 2, 3U = T + C = 24, y n = 8, 3U = T + C = 18.816.

Y para dar punto a este tema, quisiéramos añadir que H. Stempel y J. Mortensen, independientemente uno del otro, han hallado fórmulas para calcular el máximo número de movimientos que cada pieza puede ejecutar en el ajedrez de cuatro y de cinco dimensiones. Mas tales fórmulas son muy complicadas y, por ende, impropias de este libro.

Al comienzo de este capítulo hemos hablado de la movilidad media M de una pieza de ajedrez. La suma de todos los movimientos realizables en un tablero de n^2 escaques habrá de dividirse por n^2. La movilidad media de cada pieza será:

$$M(\mathrm{R}) = \frac{4\ (2n - 1)\ (n - 1)}{n^2}$$

$$M(\mathrm{D}) = \frac{2\ (5n - 1)\ (n - 1)}{3n}$$

$$M(\mathrm{T}) = 2\,(n - 1)$$

$$M(\mathrm{A}) = \frac{2\ (2n - 1)\ (n - 1)}{3n}$$

$$M(\mathrm{C}) = \frac{8\ (n - 1)\ (n - 2)}{n^2}.$$

Aquí no se tienen en cuenta los enroques; en el tablero normal, es decir, cuando n es igual a 8, se obtienen los siguientes valores, ya citados anteriormente: R = 6 9/16, D = 22 3/4, T = 14, A = 8 3/4 y C = 5 1/4. Si en el tablero hay dos piezas del mismo color, lógicamente estorbará una el paso de la otra. Veamos la suma de todos los impedimentos I o, lo que es lo mismo, el número de movimientos que una torre no puede efectuar por impedírselo una pieza de su bando, teniendo en cuenta todas las coordinaciones que se pueden hacer con estas dos piezas:

$$I(\mathrm{T}) = 2/3\ n^2\ (n^2 - 1).$$

En cambio, la suma de los impedimentos que una pieza pone a un alfil de su bando en cualquier casilla es sólo la mitad:

$$I(\text{A}) = 1/3\ n^2\ (n^2 - 1).$$

A consecuencia del impedimento que una torre y un alfil se ponen recíprocamente, no se producen

$$I(\text{T}+\text{A}) = n^2\ (n^2 - 1)$$

movimientos cuando ambas piezas se sitúan simultáneamente en distintos escaques del tablero. Si tal impedimento no existe, la suma de los movimientos factibles que pueden ejecutar dos piezas, coordinadas discrecionalmente en un tablero de n^2 casillas, es

$$(n^2 - 1)\ (N_1 + N_2).$$

N_1 y N_2 representan los valores, correspondientes a R, D, T, A y C y que hemos citado anteriormente, del mayor número posible de movimientos que cada pieza puede ejecutar en un tablero de n^2 escaques. Si de dichos valores se resta el número de impedimentos, se obtendrá la suma de los movimientos posibles en todas las coordinaciones que se formen con ambas piezas:

$$N_{(1,\,2)} = (n^2 - 1)\ (N_1 + N_2) - I(\text{de la pieza}_1) - I(\text{de la pieza}_2).$$

Veámoslo de una forma más sencilla: si designamos por pieza$_1$ una torre y por pieza$_2$ un alfil del mismo color, tendremos:

$$\begin{aligned}
&N_1 = T = 2n^2\ (n - 1)\\
&N_2 = A = 2/3\ n\ (2n - 1)\ (n - 1)\\
&N_{(1,\,2)} = N(\text{T, A}) = n^2 - 1) \cdot 2/3\ n\ (5n - 1)\ (n - 1) -\\
&\quad - n^2\ (n^2 - 1) = 1/3\ n\ (n^2 - 1)\ (10n^2 - 15n + 2).
\end{aligned}$$

En el caso de dos damas blancas, este valor se duplica, o sea, es $2N(\text{T, A})$.

Por tanto, la movilidad media de una dama blanca será

$$2N(\text{T, A}) : 2n^2\ (n^2 - 1) = \frac{10n^2 - 15n - 2}{3n}.$$

Si n es igual a 8, la movilidad media será 21 2/3 en vez de 22 3/4, valor sin impedimento citado anteriormente.

Cuando la $pieza_2$ pone impedimento y es de color distinto que la $pieza_1$, el impedimento mutuo es menor, por cuanto una pieza puede comer a la otra. En tal caso, designaremos por I′ tal impedimento y obtendremos para la dama, la torre y el alfil los siguientes valores:

$$I'(\text{D}) = 1/3 \; n \; (n - 1) \; (n - 2) \; (3n - 1)$$
$$I'(\text{T}) = 2/3 \; n^2 \; (n - 1) \; (n - 2)$$
$$I'(\text{A}) = 1/3 \; n \; (n - 1)^2 \; (n - 2).$$

Entre el impedimento de una pieza del mismo color I, el de una de color distinto I′ y el número de movimientos sin impedimento N existe la relación:

$$I' + N = I.$$

En el caso de haber una dama blanca y otra negra en el tablero, la movilidad media de una dama es análoga a la que hemos hallado anteriormente para la dama blanca:

$$\frac{10n^2 - 5n - 3}{3(n + 1)}.$$

Lo cual da 22 1/9, valor un poco más elevado que el anterior, cuando *n* es igual a 8.

LOS RECORRIDOS DE LAS PIEZAS DE AJEDREZ

En este capítulo se proponen las siguientes cuestiones:

¿Con qué mínimo número de movimientos puede una pieza ir de un punto hacia otro del tablero?

¿De cuántas maneras podrá hacerlo si cuenta con más movimientos que los imprescindibles para tal fin?

¿En cuántos movimientos pueden dos piezas cambiar sus respectivas sedes, situadas en ciertos escaques?

¿De cuántas maneras sucede esto?

¿Cómo debe una pieza recorrer todo el tablero sin pasar dos veces por un mismo escaque?

Estas cuestiones se refieren a todas las figuras, y son particularmente interesantes cuando atañen al rey y al caballo, porque estas dos piezas recorren en un movimiento menos casillas que las otras y, por lo mismo, su marcha hacia un punto determinado es más larga.

Veamos su aplicación práctica, según el caso.

El rey

En cuántos movimientos y de cuántas maneras puede un rey moverse de un punto a otro del tablero es una de las cuestiones que más veces se ha suscitado. Merece ser puesto como ejemplo el simple hecho de que esta pieza puede ir de la casilla 1R hacia la 8R y hacerlo de diversas maneras. Es fácil ver que el menor número de movimientos necesario para llegar a ella es 7, y el de maneras de hacerlo se puede enumerar así:

Las casillas 2D, 2R y 2AR contienen el número 1, porque desde 1R se llega a ellas en un movimiento y de una sola manera. La 3AD también lo contiene, pues el recorrido más corto que conduce a ella pasa por el punto 2D, señalado con el mismo número. En cambio, la casilla 3D contiene el 2, debido a que se va a ella por la 2D y la 2R. Y la 3R contiene el número 3 porque se alcanza por tres recorridos distintos. De ese modo, se va asignando a los demás escaques el valor correspondiente al número de accesos a ellos. Ejemplo: al 8R se le asigna el valor 393, pues este número representa la suma de los diversos recorridos que hay para ir del punto 1R a él.

Diagrama núm. 8

8				357	393	356		
7			90	126	141	126	89	
6		15	30	45	51	45	30	14
5	1	4	10	16	19	16	10	4
4		1	3	6	7	6	3	1
3			1	2	3	2	1	
2				1	1	1		
1					0			
	TD	**CD**	**AD**	**D**	**R**	**AR**	**CR**	**TR**

Este asunto se puede generalizar matemáticamente; de aquí que se hayan propuesto diversos métodos. Veamos a continuación uno de ellos:

Consideremos la casilla 1TD (de las blancas) como el punto de intersección o cero de un sistema de coordenadas, de modo que la primera horizontal sea el eje de abscisas o de las equis y la vertical TD el eje de ordenadas o de las íes. Designemos por x^{+1} $(= x)$ cada movimiento del rey con el cual su distancia al eje de las íes aumente una casilla; por x^0 $(= 1)$ cada uno que no haga variar dicha distancia, y por x^{-1} cada uno con el cual su distancia al eje de las íes disminuya una casilla. Y sucederá lo mismo cuando el rey se distancie del eje de las equis; en este caso, se tendrá y^{+1} $(= y)$, y^0 $(= 1)$ e y^{-1}. El valor de cada movimiento estará representado por el producto de los dos símbolos que le correspondan. Ejemplo [1]: si el rey está colocado en la casilla 4R (de las blancas), habrá las 8 posibilidades siguientes:

[1] Aquí se considera la casilla 4R como el punto cero del sistema de coordenadas.

MOVIMIENTOS	PRODUCTOS DE LOS SIMBOLOS (VALOR DE LOS MOVIMIENTOS)
R4R-5R	y
R4R-5A	xy
R4R-4A	x
R4R-3A	xy^{-1}
R4R-3R	y^{-1}
R4R-3D	$x^{-1}y^{-1}$
R4R-4D	x^{-1}
R4R-5D	$x^{-1}y$

Una sucesión de más movimientos se representará por el producto de los valores de los movimientos que la compongan. Ejemplo: la sucesión R4R-6R la representaremos por el símbolo y^2 y la R4R-2TR por los x^3y^{-2}; quiere esto decir que la posición del rey dista 2 casillas del eje de las equis en el primer caso y 2 casillas del eje de las equis y 3 del de las íes en el segundo caso. Se ve fácilmente que nada importa si la marcha del rey hacia un punto cualquiera es directa o indirectamente, pues el producto es siempre el mismo en ambos casos.

En el uso de dichos símbolos, el signo + significará "o" en lo sucesivo. Así, cuando en la expresión.

$$(x + y + x^{-1} + y^{-1} + xy + xy^{-1} + x^{-1}y + x^{-1}y^{-1})^n$$

n sea igual a 1, significará que el rey ejecuta uno de los 8 movimientos posibles; cuando n sea igual a 7, se entenderá que dicha pieza efectúa una serie de siete movimientos en cualquiera de las 8 direcciones indicadas en el paréntesis, incluida la que esté en sentido contrario al movimiento precedente.

Si se desarrolla el paréntesis por multiplicación, se obtendrá una serie de muchos términos, en los cuales las potencias de x y de y forman parte de numerosas combinaciones de la clase x^uy^v (u y v pueden ser iguales a cero y también a un número entero positivo o negativo); por ejemplo: x^7y^0 $(= x^7)$ o $x^{-3}y^2$. Cada uno de estos términos tiene un coeficiente, que corresponde al número de recorridos de n movimientos, en los cuales la distancia del rey al eje de abscisas y al de ordenadas varía v y u casillas, respectivamente.

Pero la verdad es que todo eso resulta demasiadamente complicado y teórico; por ello, conviene reducirlo a términos comprensibles al entendimiento. Volvamos al caso de la marcha del rey desde la casilla 1R hasta la 8R en un mínimo recorrido de 7 movimientos. Como en este caso se trata de movimientos directos, o "hacia arriba", en los que crece sólo y, consideraremos únicamente el valor de los xy, y y $x^{-1}y$. Entonces, para el recorrido de 7 movimientos tendremos la expresión

$$(xy + y + x^{-1}y)^7 \text{ o, lo que es igual, } y^7 (x + 1 + x^{-1})^7$$

que conviene desarrollar: el resultado de la serie de 7 movimientos ha de ser el recorrido que el rey hace para trasladarse del punto 1R al 8R; quiere esto decir que la distancia al eje de abscisas aumenta 7 casillas y la distancia al de las ordenadas permanece inalterable. Por lo tanto, se tendrá $u = 0$ y $v = 7$, lo cual significa que interesa el coeficiente del término y^7; se deberá considerar el término del paréntesis sin la x, puesto que y^7 ya está fuera del mismo. Según cierto cálculo, su coeficiente es 393 y está representado en el diagrama número 8.

Si se quiere hallar el número de todos los recorridos posibles para ir de 1R a 8D, interesará el coeficiente de $x^{-1}y^7$, por cuanto el rey habrá de distanciarse un escaque del eje de las íes. Pero como y^7 está ya fuera del paréntesis, se considerará sólo el término x^{-1} del mismo y cuyo coeficiente es 357, valor también expresado en el diagrama antedicho.

Por el mismo procedimiento, y de acuerdo con la expresión general

$$(x + y + x^{-1} + y^{-1} + xy + xy^{-1} + x^{-1}y + x^{-1}y^{-1})^n$$

citada anteriormente, se puede hallar el número de recorridos de n movimientos que el rey ha de hacer para ir de un punto hacia otro. La suma de los coeficientes de todos los términos de la expresión, encerrada en el paréntesis, corresponde a la suma de dichos recorridos, que empiezan en una casilla dada y tienen relación con otros indirectos o vuelven a reducirse parcial o totalmente.

Pero esto es válido cuando el tablero no es limitado; si lo es, los resultados variarán, aunque serán todavía calculables. Decíamos que el número de los diversos recorridos del rey desde 1R hasta 8D es 357. Y el de los recorridos de 1R hacia 8AR habría de tener igual valor que el coeficiente del término xy^7, según la fórmula; pero su cálculo da, por el contrario, 356 (véase diagrama 8); esto se debe a la falta de un escaque $5TR_1$ que sea simétrico respecto del 5TD con referencia al 1R. ¿Cómo sortear esta dificultad calculatoria?

Veámoslo: consideremos el número de 7 recorridos con que el rey cuenta para ir del punto 1TR al 8CR. A fin de poder operar con las habituales notaciones de los escaques, sustituyamos el 1R por el 1TR y el 8D por el 8CR, conviniendo en que el rey no cruce la columna AR (diagrama 9).

Diagrama núm. 9

	TD	CD	AD	D	R	AR	CR	TR
8				196	127	0		×
7			69	76	51	0		
6		14	25	30	21	0		
5	1	4	9	12	9	0		
4		1	3	5	4	0		
3			1	2	2	0		
2				1	1	0		
1					0			

El número de recorridos factibles desde 1R hasta 8D es 196, si no se cruza la columna en cuestión. Para hallarlo nos valdremos de un curioso artificio, a saber: se procurará que el punto 8D, objeto y fin de los diversos recorridos, sea simétrico respecto del eje de la columna AR con referencia al de la novena columna TR_1. Tal simetría permite determinar la casilla 8TR, señalada con una cruz en aspa; luego, por el procedimiento de cálculo sobredicho se halla el número de todos los recorridos del rey hacia el punto 8D de un tablero ilimitado; a esto se le resta el de todos los recorridos hacia el escaque 8TR, determinado por simetría, en un tablero también ilimitado. En este caso, y en la fórmula

$$y^7 (x + 1 + x^{-1})^7$$

se ha de averiguar el coeficiente del término $x^{-1}y^7$, o sea, el del x^{-1} encerrado en el paréntesis, y restarle el coeficiente del término x^3y^7, es decir, el del x^3 encerrado igualmente en el paréntesis. El primero, como se ha dicho antes, es 357, y el segundo da, en cambio, 161. Por tanto, la diferencia entre 357 y 161 será 196.

Fácilmente vemos que por este procedimiento se halla el resultado verdadero. Falta aclarar que, si el rey cruza una casilla de la columna AR en su recorrido hacia el punto 8D, el trayecto que le quede por recorrer será simétrico respecto de las casillas 8D y 8TR con referencia a dicha casilla.

Este método, que debe atribuirse a R. C. Chevalier, sirve igualmente para hallar el número de los recorridos de mayor cantidad de movimientos que la necesaria para realizarlos. Ejemplo: cuando se pide que el rey efectúe todos los posibles recorridos de 8 movimientos desde 1R hasta 8R; en ello se consideran los efectuados lateralmente, es decir, el valor de los términos x y x^{-1} que los representan. Su expresión es

$$(x + x^{-1} + xy + x^{-1}y + y)^8.$$

Aquí hay que averiguar el coeficiente del término y^7, y restarle el del x^8y^7, porque el punto 8R es simétrico respecto del $8TR_1$ (novena columna) con referencia al 1R y porque el $8TR_5$ (decimotercera columna) dista del eje de ordenadas 8 casillas más que el 8R. El resultado da 5.704 recorridos.

Por último, veamos un caso sencillo y sin simetría: dado el número de recorridos de 8 movimientos en que el rey puede ir del punto 1TD al 8TR, y cuya expresión es

$$(x + xy + y)^8,$$

hállese el coeficiente del término x^7y^7. Su valor es 56.

Estos métodos de cálculo han sido tratados con bastante amplitud, por ser aplicables a las otras piezas. Lo cual veremos luego.

Otro de los conocidos problemas de esta clase es el de hallar todos los recorridos cuando el rey blanco y el negro avanzan alternativamente y cambian su asiento dentro de 7 movimientos, partiendo de sus respectivas casillas. T. R. Dawson ha hallado 28.008 recorridos.

El problema del recorrido del rey por todos los escaques del tablero sin pasar dos veces por uno de ellos tiene escaso interés, ya que su enunciado se cumple fácilmente; veámoslo: R1TD - 8TD - 8CD - 2CD - 2AD - 8AD - 8D - 2D - 2R - 8R - 8AR - 2AR - 2CR - 8CR - 8TR - 1TR - 1CD - (1TD).

Es más interesante el siguiente recorrido del rey (diagrama 10), ideado por I. Ghersi, en el cual las casillas que se han de recorrer forman un cuadrado mágico en que los números colocados en las casillas de las horizontales, de las columnas y de las diagonales mayores dan una misma suma; es decir: cada una de estas líneas da 260, según la fórmula

$$1/2\ n\ (n^2 + 1)$$

en la que *n* representa el número de casillas del lado del tablero.

Diagrama núm. 10

61	62	63	64	1	2	3	4
60	11	58	57	8	7	54	5
12	59	10	9	56	55	6	53
13	14	15	16	49	50	51	52
20	19	18	17	48	47	46	45
21	38	23	24	41	42	27	44
37	22	39	40	25	26	43	28
36	35	34	33	32	31	30	29

La dama

En cuántos movimientos y de cuántas maneras puede esta veloz "pasilarga" ir de un punto a otro del tablero es un problema de escaso interés, y el referente al cambio de asiento de una dama con la otra no se ha tratado matemáticamente; en este caso, estando ambas piezas en sus respectivas casillas, se da la curiosa circunstancia de que la blanca, si le toca mover primero, como suele suceder, habrá de ejecutar tres movimientos para ir del escaque 1D al 8D; en cambio, la negra podrá hacerlo en un movimiento, pero efectuando uno de espera en la columna D. Aquí se nos plantea el problema de los movimientos que la blanca no debe realizar, incluida la prohibición de tomar a su adversaria. Véase: no puede jugar D7D porque la negra no dispondría de ninguna jugada de espera, ni D3D porque en este caso necesitaría 4 movimientos para llegar al escaque 8D. El lector podrá entretenerse en averiguar cuántas series de 3 movimientos de la dama blanca y 2 de la negra cumplen con las condiciones de este problema.

Igualmente tiene escaso interés el problema del recorrido de la dama por todos los escaques del tablero sin repetir el paso por ninguno de ellos, pues el procedimiento a seguir es el mismo que el usado en el caso del rey. Lo cual hemos visto anteriormente.

En cambio, es más complicado resolver este otro: colocada en el punto 1D (de las blancas), una dama se mueve cinco veces seguidas, de forma que la longitud total de los 5 movimientos, tomada del centro de una casilla al de la siguiente, sea máxima; pero no debe pasar dos veces por un mismo escaque, ni cruzar el camino que ha recorrido. La solución es D1D - 1TR - 8TD - 8TR - 2TR - 7AD; pero no D1D - 1TR - 8TR - 1TD - 8TD - 8CR, porque

$$17 + 12\sqrt{2} > 24 + 7\sqrt{2}.$$

Aunque la diferencia entre los dos miembros de esta desigualdad tiene escasa importancia, incluso en "los movimientos más largos", donde las negras han de ejecutar siempre el movimiento de máxima longitud geométrica. Es claro que un recorrido de 7 casillas por las rectas será solamente un 1 % más corto que uno de 5 casillas por las oblicuas.

El siguiente ejemplo también toca la geometría concerniente a los recorridos de la dama: esta pieza debe efectuar varios movimientos seguidos, procurando que la longitud geométrica de cada consecuente sea mayor que la de su antecedente y que las longitudes de los movimientos den la máxima suma. ¿En qué tablero puede la dama hacer tal recorrido y regresar a su punto de partida? En uno de 4 × 4 casillas, y con la serie D1TD - 1CD - 2TD - 2AD - 4TD - 4D - 1TD.

La máxima suma pedida es

$$1 + \sqrt{2} + 2 + 2\sqrt{2} + 3 + 3\sqrt{2} = 6 + 6\sqrt{2}.$$

La torre

Muchos problemas concernientes a los recorridos de esta pieza, lo mismo que a los de la dama, son poco interesantes porque puede andar varias casillas de un solo movimiento. Mas el asunto cambia totalmente cuando se le reduce la movilidad. Veamos un conocido problema de esta clase: dado un tablero cuyos dos lados contiguos tengan respectivamente m y n casillas de longitud, se coloca una torre en el punto (0/0) o, lo que es lo mismo, el 1TD (de las blancas) y se procura que vaya de casilla en casilla hasta el punto (m/n). ¿En cuántos recorridos $m + n$ movimientos puede ir a dicho punto? La solución es muy fácil: disponemos de movimientos en las horizontales *h* y en las verticales *v*; falta averiguar sólo el número de coordinaciones que pueden obtenerse con *m* haches y *n* uves en cada línea. Sirviéndonos de la conocida fórmula de la teoría de las combinaciones, tendremos

$$\frac{(m+n)!}{m!\ n!}.$$

Si consideramos la casilla 8TR del tablero normal como el punto (m/n), se tendrá que $m = n = 7$ y, por tanto, permitirá transformar la fórmula anterior en esta otra:

$$\frac{14!}{7!\ 7!} \quad \text{o, lo que es igual,} \quad \binom{14}{7}.$$

El problema es más complicado cuando la torre se mueve por su propio paso y va desde 1TD (de las blancas) hasta otro punto del tablero. En este caso, podrá llegar al punto (m/n) en 2, 3, 4, ... y $m - n$ movimientos, de igual o de distinta longitud. Se pide la suma de todas las sucesiones de movimientos. M. Charosh obtuvo el primer premio con este problema[2]: la torre debe ir de 1TD a 8TR en 2, 3, ... y 14 movimientos. Los solucionó de una forma relativamente elemental; veámoslo: primero determinó el número de las distintas sucesiones de movimientos en los escaques próximos al 1TD (diagrama 11), y después el de los demás, por adición

Diagrama núm. 11

3	2	5	14	37	94	232	560	1328
2	1	2	5	12	28	64	144	320
1	0	1	2	4	8	16	32	64
	TD	CD	AD	D	R	AR	CR	TR

sucesiva de valores. De ese modo, halló 470.010 recorridos desde 1TD hasta 8TR.

[2] XXXV torneo de problemas matemáticos de ajedrez, organizado por la revista yugoslava "Problem", en el que concurrieron ciento cincuenta especialistas en esta materia.

Aquí puede verse cómo aumenta el valor de cada escaque a medida que se aleja del 1TD; lástima que este diagrama muestre solamente los valores de las tres primeras horizontales. El valor de la casilla 3TR se obtiene, por ejemplo, sumando los de las casillas 3TD, 3CD, 3AD, 3D, 3R, 3AR, 1TR y 2TR.

Charosh también aportó fórmulas para determinar los valores numéricos de estas tres horizontales, y K. Fabel, jurado de la competición, expuso luego los restantes.

Pero C. Bandelow halló posteriormente la solución general del problema; considera primero el caso en que la torre vaya desde (0/0) hasta (n/n) e investiga la fórmula en cuatro fases:

1.ª Es evidente que el recorrido más corto para ir de (0/0) a (n/n) tiene un recodo o ángulo como mínimo y $2n - 1$ como máximo; dicho de otro modo, consta de 2 y de $2n$ segmentos rectilíneos, o trayectos. Considérese cierto recorrido de (0/0) a (n/n) que conste de s segmentos rectilíneos iguales, o de $s - 1$ ángulos, y muévase una torre a lo largo del mismo. El modo de caminar de ella le obliga a pararse en cada uno de los $s - 1$ recodos del trayecto, aparte la parada en el punto (0/0) de salida y en el (n/n) de llegada. Por el contrario, en las restantes $2n - s$ casillas del recorrido se podrá decidir libremente si la torre ha de hacer una parada o no. Como las $2n - s$ casillas representan el número de opciones a pararse y dan un total de 2^{2n-s} posibilidades de hacerlo, se tendrá la igualdad

$$N(n) = \sum_{s=2}^{2n} 2^{2n-s} \cdot N(n, s) \qquad [1]$$

en que $N(n)$ representa el número de todos los trayectos que la torre puede recorrer y $N(n, s)$ el de los recorridos de (0/0) a (n/n) más cortos que constan de s segmentos rectilíneos.

2.ª Aquí se sirve de la conocida fórmula de la teoría de las combinaciones: ¿De cuántas maneras se podrán repartir n bolas iguales entre i urnas, de modo que ninguna urna quede vacía? De

$$\binom{n-1}{i-1}$$

maneras.

3.ª En este lugar, determina el valor numérico del factor $N(n, s)$ del segundo miembro de la igualdad [1] que representa evidentemente la cantidad de posibilidades de unir los n segmentos horizontales con los n segmentos verticales de 1 unidad de longitud, de modo que el segmento-movimiento resultante contenga exactamente n segmentos; en ello se deben diferenciar los s pares de los s impares. Veámoslo:

a) En el caso de $s = 2i$ se considera que las i urnas horizontales se yuxtaponen alternativamente con las i urnas verticales, empezando por la i urna del extremo izquierdo. Luego, se dividen los n segmentos unidad horizontales por las i urnas horizontales y los n segmentos unidad verticales por las i urnas verticales. De la 2.ª parte de la demostración general se sabe que tal división puede efectuarse de

$$\binom{n-1}{i-1}^2$$

maneras distintas, con la condición de que ninguna urna quede vacía. Y se llega a un mismo resultado

$$\binom{n-1}{i-1}^2$$

cuando las $s = 2i$ urnas están colocadas de tal forma que en el extremo izquierdo haya una urna vertical. Ahora se ve que las divisiones de $2n$ segmentos unidad por $2i$ urnas en cuestión corresponden justamente a las varias posibilidades de unir los n segmentos unidad horizontales con los n segmentos unidad verticales, de suerte que el segmento-movimiento resultante contenga exactamente $s = 2i$ segmentos. Por lo tanto, se tendrá

$$N(n,\ 2i) = 2\binom{n-1}{i-1}^2 (i = 1,\ \dots\ n) \qquad [2].$$

b) En el caso de $s = 2i + 1$, análogamente al caso anterior en que el segmento s es par, se verifica

$$N(n,\ 2i+1) = 2\binom{n-1}{i-1}\binom{n-1}{i}(i = 1,\ \dots\ n) \qquad [3].$$

En esta fórmula se observa que el valor real de N(n, $2n + 1$) es igual a cero cuando i es igual a n, por cuanto

$$\binom{n-1}{n} = 0.$$

4.ª Por último, interpola las fórmulas [2] y [3] en la [1], para corregir un poco la suma resultante. Lo cual da esta elegante fórmula

$$N(n) = \sum_{i=1}^{n} 4^{n-1} \cdot \binom{n-1}{i-1}^2 \cdot \frac{n+i}{i}$$

en la que n puede ser igual a 1, 2, 3, ...

Por este procedimiento, Bandelow ha solucionado también el problema de los recorridos de la torre desde el escaque (0/0) hasta otro (m/n) cualquiera. Y su expresión es

$$\sum_{i=1}^{\min(m,n)} 2^{m+n-2i-1} \cdot \binom{m-1}{i-1} \cdot \binom{n-1}{i-1} \cdot \frac{m+n+2i}{i}$$

en la cual m y n pueden ser iguales a 1, 2, 3, ..., y *min* (m, n) significa que se debe tomar el mínimo valor de m y n.

Los recorridos de la torre por todos los escaques del tablero sin repetir el paso por ninguno de ellos no tiene atractivo ni presenta ninguna dificultad. Cuando esta pieza hace el recorrido, anteriormente señalado para el rey, logra volver a su punto de salida, cumpliendo con las condiciones del problema; puede igualmente hacerlo en tableros rectangulares de $m \times n$ casillas si uno de los lados es, por lo menos, par. Por el contrario, en tableros rectangulares o cuadrados, cuyo número de casillas $m \times n$, o n^2, es un número impar (en este caso m y n son impares), la torre no puede volver a su punto de partida sin pasar de nuevo por alguna de las casillas que ya ha recorrido; veámoslo en este sencillo ejemplo: consideremos un tablero de 3 × 3 escaques en el cual la torre puede hacer los siguientes recorridos: T1TD-3T-3A-1A-1C-2C. Desde el punto 2C se puede volver al 1T por el 1C o por el 2T.

Contrariamente al problema del cambio de sede de dos reyes, apenas tiene interés matemático el referente al de dos torres colocadas respectivamente en su escaque 1TD, pues su enunciado es parecido al del cambio de sede de dos damas situadas en sus respectivas casillas 1D; véase: la torre a la que toque mover primero habrá de realizar 3 movimientos para ocupar la sede de la contraria; en cambio, a ésta le basta efectuar uno para llegar al de la otra. Es más interesante el problema que propone E. T. O. Slater[3]: en un tablero hay dos torres blancas y dos negras asentadas en sus escaques correspondientes. Hállese el mínimo número de movimientos con que las primeras cambian su asiento con las

[3] Con este problema ganó el segundo premio en el citado XXXV torneo de temas.

segundas. Cada par de torres debe ejecutar 4 movimientos, y el mayor número de series de ellos es 330.

El alfil

Es la tercera y última pieza de las de mayor movilidad que tratamos en este capítulo. Las maniobras de movimientos largos tienen poco interés, fuera del caso en que cuatro alfiles están colocados en sus casillas 1AD y 1AR en un tablero sin otras piezas ni peones y cambian de sede unos con otros, haciéndolo en un mínimo número de movimientos. Con este problema, análogo al de las cuatro torres, E. T. O. Slater obtuvo también otro segundo premio en el torneo antedicho. Cada pareja de alfiles debe igualmente ejecutar 4 movimientos, si bien el número de las posibles series de ellos es sólo 104.

Si a esta pieza se le reduce la movilidad, de suerte que camine de casilla en casilla cual un visir o una pieza del juego de damas, se podrán proponer problemas como éste: ¿De cuántas maneras y con qué mínimo número de movimientos puede un alfil ir de la casilla 1R (de las blancas) a la 8D? Los métodos para resolver esta clase de problemas son semejantes a los usados para solucionar los referentes al recorrido del rey desde la casilla 1R hasta la 8R. Y en ellos se suman una a una las casillas correspondientes al número de recorridos indicado o se establece una proporción en que, con la fórmula

$$y^7 \, (x + x^{-1})^7,$$

se desarrolla dicho caso y se determina el coeficiente del término x^{-1} del paréntesis. Con estos dos métodos se llega a un mismo resultado, es decir, a 35.

En tales problemas se han de considerar igualmente los límites del tablero, como se han considerado en los relativos a los recorridos del rey. En el capítulo "Las probabilidades", que veremos más adelante, se propone un problema de esta clase.

Al estar sujeto a un solo color de casillas, el alfil no puede recorrer todas las del tablero, a menos que se use uno cilíndrico de 7 × 8; esto es: una superficie en que la columna TD se superponga sobre la TR, de modo que haya solamente siete verticales y el punto 8TD empalme diagonalmente con el 7CR. En un tablero así, esta pieza podría ir, por ejemplo, del escaque 1TD (de las blancas) al 7CR y, pasando a los escaques de color distinto del de los de su recorrido, alcanzar el 8TD.

Pero como se trata de tableros de superficie plana, particularmente de 8 × 8, es claro que un alfil recorrerá sus 32 casillas, repitiendo el paso por alguna de ellas; por eso, los recorridos completos sin volver a pasar por ninguno de los escaques del trayecto anterior son realizables únicamente en tableros de 3 × 3 y de 5 × 5 casillas y, desde luego, por las diagonales que no van de un vértice a otro del tablero. Sin embargo, son factibles y bastante extensos, aunque incompletos, los recorridos en tableros cuadrados cuya longitud del lado sea impar; en los cuadrangulares es necesario que los lados consecutivos m y n también sean impares y que su diferencia sea 2. En estos casos tampoco se podrán recorrer las diagonales que vayan de un vértice a otro. Por último, tenemos el caso, carente de importancia y de novedad, del tablero de $2 \times n$ casillas, donde n puede ser un número cualquiera.

Si se quebranta la regla de no repetir el paso por ninguna de las casillas ya recorridas, será posible efectuar un recorrido de 17 movimientos en un tablero normal. Veámoslo: A8TD (de las blancas) -6A-4T-1D-5T-8R-7D-8A-6T-1A-3T-5A-7T-8C-2T-1C-4R-1T.

El caballo

El modo de moverse esta pieza ha cautivado siempre la atención y el ánimo de los matemáticos. Los problemas referentes a ella son de la misma índole que los de las otras piezas, particu-

Diagrama núm. 12

	TD	CD	AD	D	R	AR	CR	TR
8				9		4		108
7		2		1	9	54		
6			4	14	3		54	4
5	1	3	1	2	18	3	9	
4		1	4	2	2	14	1	9
3	1	1		4	1	4		
2			1	1	3		2	
1	0		1		1			

larmente los tocantes al rey, y, por ende, los métodos empleados para resolverlos son idénticos.

Veámoslo: para determinar los recorridos que el caballo puede hacer en un mínimo número de movimientos para ir de la casilla 1TD (de las blancas) a la 8TR, lo menos complicado será proceder exactamente como se ha procedido para determinar los del rey desde la 1R hasta la 8R. A los escaques 3CD y 2AD les corresponde la cifra 1; al 4D la 2, y así sucesivamente (diag. 12). Por último, al 8TR le corresponderá el número 108.

Del mismo modo que en el caso del rey, estos problemas pueden resolverse matemáticamente. En ello se ha de considerar que, en cada movimiento, la distancia de un eje de las coordenadas aumentará o disminuirá 1 unidad, mientras la distancia del otro eje aumentará o disminuirá 2 unidades.

Si el caballo está situado en la casilla 4R (de las blancas), se tendrán los siguientes valores:

MOVIMIENTOS	PRODUCTOS DE LOS SIMBOLOS (VALOR DE LOS MOVIMIENTOS)
C4R-6A	xy^2
C4R-5C	x^2y
C4R-3C	x^2y^{-1}
C4R-2A	xy^{-2}
C4R-2D	$x^{-1}y^{-2}$
C4R-3A	$x^{-2}y^{-1}$
C4R-5A	$x^{-2}y$
C4R-6D	$x^{-1}y^2$

Un recorrido de *n* movimientos estará representado por la expresión.

$$(x^2y + xy^2 + x^2y^{-1} + xy^{-2} + x^{-2}y + x^{-1}y^2 + x^{-2}y^{-1} + x^{-1}y^{-2})^n,$$

en la cual el signo + se debe tomar por "o". Si se quiere averiguar los recorridos de *n* movimientos en que el caballo puede trasladarse de un escaque dado a otro igualmente dado, habrá que desarrollar primero la expresión citada y determinar luego el coeficiente del término x^uy^v, que expresará la distancia del punto de salida. Para fijar las ideas y evitar repeticiones, aconsejamos al lector que repase lo dicho acerca de los recorridos del rey.

Desde luego, en el caso del caballo también se ha de contar con los límites del tablero que eventualmente puedan presentarse, pues tales se manifiestan en los recorridos largos y, por ello, los interrumpen antes; cuanto más que el caballo aventaja al rey en movilidad.

Las publicaciones sobre los recorridos del caballo son cuantiosas, aparte las que tratan del modo de saltar de esta pieza. C. F. de Jaenisch destinó muchas páginas a este asunto en una obra casi desaparecida [4]. Otros autores han publicado también numerosos problemas para tableros, así pequeños y limitados como grandes e ilimitados; problemas que no vamos a proponer, por cuanto resolverlos no presenta ninguna dificultad después de todo lo dicho al respecto.

Hemos visto que el caballo puede ir del punto 1TD (de las blancas) al 8TR, y hacerlo de 108 maneras diferentes en un tablero de 8 ×8. Pero es más interesante este otro problema: ¿Qué posibilidades de cambiar de asiento tienen dos caballos de color distinto, colocados respectivamente en 1TD (de las blancas) y en 1TR (de las negras)? La solución es $108^2 — 1.188$ encuentros en ciertas casillas = 10.476.

El enunciado de este problema sirve igualmente para los "saltones", cuyo modo de andar es distinto al del caballo común: el camello, por ejemplo. Esta pieza vale 1,3 caballos; puede ir del escaque 1TD (de las blancas) al 4CD o al 2D, y, por ende, salta siempre a casillas de un mismo color. Un camello situado en la casilla 1TD (de las blancas) puede cambiar de asiento con uno de color distinto que esté colocado en la 1TR (de las negras) en 5 movimientos y de 790 maneras diferentes [5].

A pesar de haberse publicado un sinfín de problemas de esta categoría, I. Ivančo propuso uno nuevo [6], que no tiene gran importancia por sí mismo. Consiste en buscar el número de recorridos de 16 movimientos que empiezan en la casilla 4R (de las blancas) y finalizan en la misma o en la 5D (también de las blancas) en el tablero de 8 × 8. Lo solucionó por el sobredicho método de adición sucesiva de valores. Pero, más tarde, A. Gschwend corrigió el resultado, el cual parece ahora correcto: el número de recorridos de 16 movimientos que empiezan en la casilla 4R y finalizan en la misma es 234.942 123.612, y el de los que terminan en el escaque 5D es 234.835 210.492.

Pero es más interesante este otro problema propuesto asimismo por I. Ivančo:

Sea P2*n* la expresión del número de los diferentes recorridos

---

[4] *Traité des Applications de l'Analyse Mathématique au Jeu des Echecs*, tomo I (1862-1863)

[5] T. R. Dawson lo publicó en "Fairy Chess Review" (1939).

[6] Con él obtuvo la mención honorífica en el citado XXXV torneo.

del caballo que parten de una casilla dada y finalizan al cabo de $2n$ movimientos en otra casilla también dada y del mismo color que el de aquélla; $P2n + 2$ será la expresión del número de todos los recorridos de $(2n + 2)$ movimientos. Se pide el límite $P2n + + 2 : 2n$ en el caso de que n sea infinito. Tras numerosos cálculos, se ha comprobado que dicho límite se halla comprendido entre los valores 36,127 y 36,128.

Por una carta de A. Gschwend se sabe que las condiciones del problema de I. Ivančo se pueden reducir a términos simples; véase: sea Rn el número de todos los recorridos de n movimientos del caballo en el tablero de 8×8; se pide buscar el límite $Rn + 1 : Rn$ en el caso de que n sea infinito. Gschwend ha hallado el valor numérico de dicho límite, o sea 6,01066. Elevando este valor al cuadrado, se obtiene el límite hallado por Ivančo; límite que, como se ha comprobado, corresponde al caso en que el recorrido más largo exceda en 2 movimientos al más corto.

Los saltos del caballo que recorre el tablero sin repetir el paso por ninguna casilla es uno de los problemas más conocidos. Sobre él se han publicado muchos trabajos, que abarcan simples composiciones, extensos capítulos de libros de matemáticas recreativas y volúmenes enteros. Pero es aún mayor el número de saltos de caballo, conocidos hasta el presente, compuestos por diversos procedimientos para tableros de formas y dimensiones más dispares.

Teniendo en cuenta la profusa literatura sobre este asunto, no creemos necesario tratarlo detenidamente; por ello, nos limitaremos a ofrecer sólo un ejemplo: el recorrido del caballo, medio mágico, simétrico y cerrado, en que las cantidades colocadas en las casillas de cada horizontal y vertical dan una misma suma, es decir, 260 (véase el diagrama 13 y compárese su contenido con el del diagrama 10).

Por lo visto, aún no se ha logrado componer un recorrido en que la suma de las cantidades de las casillas de cada una de las diagonales mayores dé también 260, para poder darle el nombre de "mágico". En este diagrama, la cadena 1-32 se cambia con la cadena 33-64, dando al tablero un giro de 180°; de aquí procede el nombre de "simétrico". Por "cerrado", al contrario de "abierto", debe entenderse un salto de caballo en que la casilla de salida y la de llegada también "saltan" al 63 eslabón de la cadena; quiere esto decir que una casilla se encuentra a un salto de caballo de la otra.

Dada la circunstancia de que esta pieza salta siempre a una casilla de color distinto, no son factibles, por supuesto, los recorridos en un tablero cuyo número de casillas sea impar; en uno de 7 × 7, por ejemplo. Tampoco son siempre posibles en tableros de un número de casillas par; en uno de 4 × 8, para citar otro ejemplo.

Diagrama núm. 13

8	50	11	24	63	14	37	26	35
7	23	62	51	12	25	34	15	38
6	10	49	64	21	40	13	36	27
5	61	22	9	52	33	28	39	16
4	48	7	60	1	20	41	54	29
3	59	4	45	8	53	32	17	42
2	6	47	2	57	44	19	30	55
1	3	58	5	46	31	56	43	18
	TD	CD	AD	D	R	AR	CR	TR

Se investiga mucho el número de todos los recorridos posibles en tableros de diversas superficies; sobre todo, en el de 6 × 6 y en los de 4 × *n*. En el normal se han calculado límites, entre los cuales deben hallarse comprendidos los verdaderos valores numéricos que representan los recorridos abiertos y cerrados. A modo de ejemplo, señalaremos que se producen 122 802.512 saltos de caballo cuando esta pieza recorre primero una mitad del tablero y, luego, la otra mitad. Por ello, el número completo de saltos de caballo es esencialmente superior a dicha cantidad e inferior a ciertos valores, que otros autores han hallado: por ejemplo: K. Fabel da $1{,}5 \cdot 10^{26}$.

Mediante la calculadora electrónica, se ha determinado que se puede hacer 1 solo recorrido de 17 movimientos sin cortar la línea de los mismos, y prescindiendo de las vueltas y de la simetría, en un tablero de 6 × 6. Véase: C5AR (de las blancas)-6D-4R-2A-3D-1R-2A-1T-3C-2D-4A-3R-5D-6C-4T-3A-5C-4D.

El peón

En los problemas de ajedrez matemáticos, la importancia del peón es inferior a la de los otros dos "pasicortos", el caballo y el rey, por cuanto su movilidad es muy limitada. En el caso más favorable, es decir, en la posición inicial comprendida entre las columnas CD y CR, el peón dispone de 4 movimientos diferentes: el avance sencillo, el avance doble y la toma de una pieza adversaria por el flanco izquierdo o por el derecho si se presenta la oportunidad de hacerlo. Planteamientos tales, como en cuántos movimientos y de cuántas maneras puede un peón ir de una casilla dada a otra también dada, se resuelven por el procedimiento que se ha seguido para hallar el valor numérico de los recorridos del rey; el de 1R a 8R por ejemplo. En el cálculo se prescinde del movimiento doble, y se tratan por separado los casos referentes a él. Otros problemas en los que interviene el movimiento doble son de esta índole: ¿De cuántas maneras diferentes pueden 2, 3, 4, etc., peones blancos ir de la segunda a la octava horizontal sin tomar ninguna pieza ni peón adversarios? Cada transposición de movimientos se considera como una solución particular. Considerada la posibilidad de los movimientos dobles, el número de recorridos de 2 peones será

$$\frac{12!}{6!\ 6!} + 2 \cdot \frac{11!}{5!\ 6!} + \frac{10!}{5!\ 5!} = 2.100.$$

El de 3 peones será

$$\frac{18!}{6!\ 6!\ 6!} + 3 \cdot \frac{17!}{5!\ 6!\ 6!} + 3 \cdot \frac{16!}{5!\ 5!\ 6!} + \frac{15!}{5!\ 5!\ 5!}.$$

Y el cálculo se prosigue en estos términos si hay más de tres peones.

Antes de poner punto a este capítulo, quisiéramos citar un artículo de P. Bidev, titulado "El cuadrado mágico de Albrecht Dürer y los vericuetos por donde andan las piezas de ajedrez" [7]. Apoyándose en sus investigaciones, este autor estima que el juego de ajedrez es una creación procedente del cuadrado mágico.

[7] "Deutsche Schachzeitung" (septiembre de 1970).

COORDINACIONES DE PIEZAS IDENTICAS

Este capítulo trata, entre otras, de las siguientes cuestiones:

¿Qué mínimo número de piezas de cierta clase es necesario y suficiente para abarcar todas las casillas de un tablero de forma y dimensiones dadas?

¿Cuántas piezas de una especie se podrán colocar de modo que cada una no proteja a las demás en un tablero de dimensiones dadas?

¿Cuántas coordinaciones se podrán formar en los dos casos antedichos?

¿De cuántas maneras diferentes se pueden coordinar 2, 3, 4 y más piezas idénticas en un tablero de dimensiones dadas, de suerte que cada una no abarque los lugares ocupados por las otras?

Estas y otras cuestiones se propondrán separadamente en cada caso al igual que se ha hecho en el capítulo "Los recorridos de las piezas de ajedrez".

El rey

En el problema llamado mínimo, o sea, cuando es mínimo el número de reyes necesarios y suficientes para abarcar todas las casillas del tablero, se formula en seguida la pregunta de si los lugares ocupados por los reyes deben considerarse "incluidos"; si la respuesta es afirmativa, entonces 9 piezas de esta clase bastarán para cumplir las condiciones del problema en un tablero usual (diagrama 14).

En el caso de que la respuesta sea negativa, habrá que conformarse con el fenómeno ajedrecista de que reyes de color igual están situados en casillas contiguas a las que ocupan otros reyes y se protegen mutuamente, aunque unos no puedan acercarse a los otros. Con tal protección se satisface el enunciado del problema de que se abarquen igualmente los lugares ocupados por los elementos; pero aquí se necesitarán 12 reyes para abarcar las 64 casillas del tablero normal (diagrama 15).

El cumplimiento de dichas condiciones no presenta dificultades en tableros de otras dimensiones; hasta el presente, no se ha calculado el número de coordinaciones de piezas idénticas que pueden formarse en ellos, debido al escaso interés que ofrecen.

Son mucho más interesantes estos otros problemas: ¿Cuántos reyes se podrán colocar sin protección mutua en tableros de di-

Diagrama núm. 14

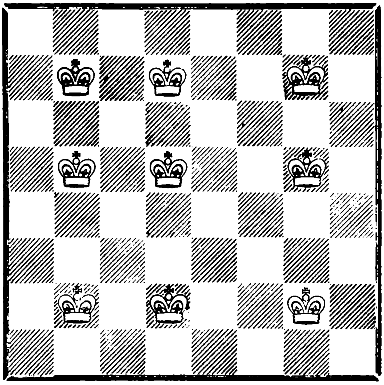
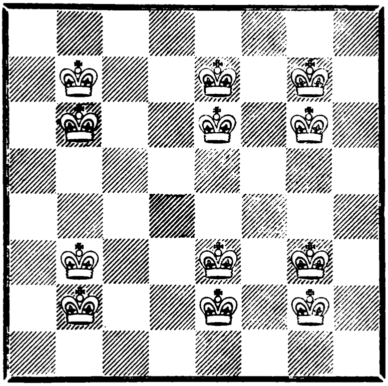
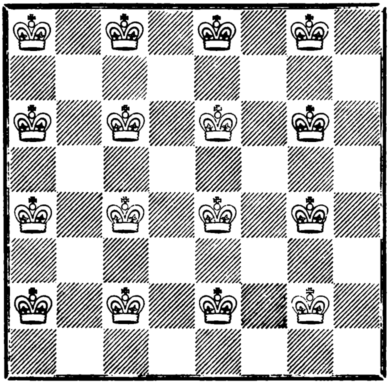


Diagrama núm. 15



mensiones varias (problema máximo), y qué número de coordinaciones podrá formarse de ellos? En el tablero normal podrán colocarse evidentemente 16 reyes, de forma que unos no ocupen la casilla contigua a la de los otros.

Diagrama núm. 16



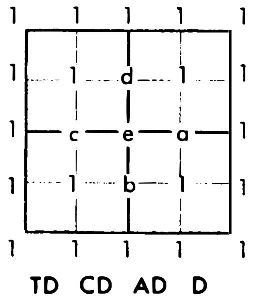
En este diagrama figura una de las diversas posibilidades; cómo ningún escaque de la columna TR ni de la primera horizontal está ocupado; luego es fácil hacer ver que se podrá formar una coordinación de 16 reyes en un tablero de 7 × 7, satisfaciendo el enunciado antedicho. Por el contrario, se obtiene un número considerable de coordinaciones diferentes en el de 8 × 8.

Es claro que cada uno de los 16 reyes deberá permanecer dentro de un cuadrado formado de 4 casillas; por ejemplo: un rey ocupará una de las casillas 1TD, 2TD, 2CD o 1CD y el siguiente una de las 1AD, 2AD, 2D o 1D, y así sucesivamente. Desde luego, se producirán encuentros en los límites de los cuadrados.

K. Fabel ha determinado el número de coordinaciones en que no se producen encuentros[1].

El procedimiento para determinarlo es muy curioso, y lo explicaremos primero en un tablero de 4 × 4 = 16 casillas (diagrama 17). Designaremos por cierta letra cada uno de los cuatro ángulos en que pueda producirse un encuentro y por la cifra 1 los restantes. De esa manera, *b*, 1, *c* y *e* representarán los ángulos de la casilla 2CD. Cada casilla se caracterizará por el producto de los valores de sus cuatro ángulos; véase: la 1TD por 1; la 2TD por *c*, y la 2CD por *bce.*

Diagrama núm. 17



Y el valor de cada cuadrado será la suma de los valores de las 4 casillas que lo formen; el valor del formado por las casillas 1TD, 2TD, 2CD y 1CD será, por ejemplo, $1 + b + c + bce$. Ahora, si se multiplican los valores de los 4 cuadrados que forman el tablero (1TD-4T-4D-1D):

$$(1 + b + c + bce) \cdot (1 + c + d + cde) \cdot$$
$$\cdot (1 + a + d + ade) \cdot (1 + a + b + abe)$$

[1] "Schwalbe" (1964).

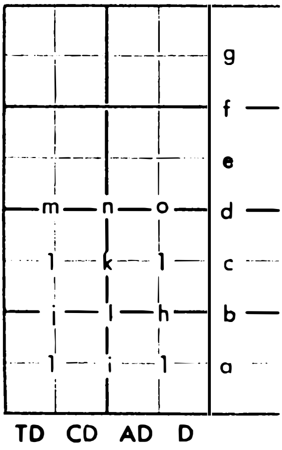
y se suprimen los términos que tengan una letra elevada al cuadrado, se obtendrá una expresión de 79 términos, unos iguales y otros desiguales. De consiguiente, 79 será el número de las coordinaciones de 4 reyes sin protección mutua en un tablero de 4 × 4.

Los términos elevados al cuadrado se suprimen, porque cada uno de ellos representa un encuentro.

Si proseguimos investigando en un tablero de 4 × 8, en lo cual tendremos que emplear más letras, obtendremos una expresión de 1.847 términos, unos iguales y otros desiguales. Y así, 1.847 será el número de coordinaciones de 8 reyes sin protección mutua en un tablero de 4 × 8.

En la solución del problema de los 16 reyes en el tablero normal, los ángulos de las casillas se señalarán como se indica en este diagrama. Al calcular el cuadrado formado por las casillas 1TD, 4T, 4D y 1D, se obtendrá de nuevo una expresión de 79

Diagrama núm. 18



términos, en la cual se podrán sustituir las letras *h*, *i*, *j*, *k* y *l* por la cifra 1, ya que no son necesarias. Al cuadrado superior que forman las casillas 5TD, 8T, 8D y 5D se le podrá asignar la expresión citada; pero en ella se tendrá que sustituir la *a* por la *g*, la *b* por la *f* y la *c* por la *e*. Tras lo cual una expresión se multiplicará por la otra y se suprimirán asimismo los términos que resulten elevados al cuadrado. Este resultado corresponderá al obtenido en el tablero de 4 × 8; esto es: se obtendrá una expresión de 1.847

términos, unos iguales y otros desiguales, en la que se sustituirán respectivamente las letras *m*, *n* y *o* por la cifra 1. Y así, la expresión resultante será

$$25 + 37a + 37g + 52ag + \ldots + 160abcdefg.$$

De ese modo, se habrá llegado casi al resultado que se buscaba; sólo faltará multiplicar esta expresión por sí misma y suprimir los términos que resulten elevados al cuadrado. Lo cual dará otra expresión de 281.571 términos, unos iguales y otros desiguales. Por lo tanto, 281.571 es el número de coordinaciones de 16 reyes sin protección mutua en el tablero normal.

Este procedimiento también se usa para calcular el número de coordinaciones de 6, 9 y 12 reyes sin protección mutua en tableros de 4×6, 6×6 y 6×8 casillas; por el contrario, se usa la simple fórmula $(m + 1) \times 2^m$ en tableros de $2 \times 2m$. Veamos la siguiente tabla de resultados:

Dimensiones del tablero	Número de reyes	Número de coordinaciones
2 × 2	1	4
2 × 4	2	12
2 × 6	3	32
2 × 8	4	80
4 × 4	4	79
4 × 6	6	408
4 × 8	8	1.847
6 × 6	9	3.600
6 × 8	12	26.040
8 × 8	16	281.571

Cuando el número de casillas del lado del tablero es impar se reduce el espacio en que cada rey puede moverse, y no presenta la menor dificultad hallar el número de posiciones que se pueden formar de estas piezas sin protección mutua.

C. E. Kemp ha revisado el cálculo correspondiente al tablero de 8×8 y lo ha corroborado. A más de esto, ha seguido un procedimiento propio para calcular los valores referentes a una serie de tableros de dimensiones varias. Este procedimiento consiste en ir añadiendo, según las necesidades, al lado mayor de los tableros de 2×4 y 2×6 otros de iguales dimensiones, con el fin de eliminar los encuentros a medida que van surgiendo.

C. Bandelow ha confeccionado un programa para la calculadora electrónica; en él usa un tablero de 2 × 8, a cuyo lado mayor le va añadiendo otros tableros de las mismas dimensiones. La calculadora da los siguientes resultados:

Dimensiones del tablero	Número de reyes	Número de coordinaciones
2 × 8	4	80
4 × 8	8	1.847
6 × 8	12	26.040
8 × 8	16	281.571
10 × 8	20	2 580.754
12 × 8	24	21 137.959
14 × 8	28	159 636.030
16 × 8	32	1 134 127.305
18 × 8	36	7.683 664.202
20 × 8	40	50.123 713.793

Vemos que también aquí está comprobado el valor numérico de las coordinaciones en el tablero normal.

Y para hallar el de las coordinaciones en tableros de $2m \times 4$, Bandelow propone esta elegante fórmula

$$C(2m,\ 4) = \frac{2}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{m+5} - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{m+5}\right] +$$
$$+ (17m - 109) \times 3^{m}.$$

Además de las coordinaciones que se pueden obtener de un máximo número de reyes, interesan las que pueden formarse de 2, 3, 4, etc., reyes en un tablero de dimensiones dadas, con la condición de que cada pieza no abarque la casilla de las otras. Y en ellas deben tenerse en cuenta las siguientes circunstancias:

En un tablero cuadrado de n^2 casillas, una pieza se puede coordinar de n^2 maneras diferentes. Si se añade otra pieza, se dispondrá de $n^2 - 1$ casillas; por lo tanto, el número de coordinaciones de ambas piezas será $n^2(n^2 - 1)$, si las dos piezas son diferentes; en caso contrario, las dos coordinaciones son iguales y su máximo número es $1/2\ n^2(n^2 - 1)$ o, lo que es igual, $\binom{n^2}{2}$. Y así, $n^2(n^2 - 1)\ (n^2 - 2)$ será el número de coordinaciones de tres piezas distintas y $1/6\, n^2(n^2 - 1)\ (n^2 - 2)$, o $\binom{n^2}{3}$, el de tres piezas idénticas.

Si coordinamos el rey blanco y el negro en el tablero, deberemos tener en cuenta la legalidad, o normalidad, de su coordinación y restarle al número de todas las coordinaciones posibles el de las posiciones ilegales, o anormales, de estas dos piezas. Sin embargo, esto corresponde al máximo número de movimientos que el rey puede ejecutar (véase el capítulo "La movilidad de las piezas de ajedrez"), pues el rey negro no debe ocupar ninguna de las casillas a las que el rey blanco pueda llegar en un movimiento. Por lo tanto, se tendrán

$$n^2(n^2 - 1) - 4\ (2n - 1)\ (n - 1) = (n - 1)\ (n - 2)\ (n^2 + 3n - 2)$$

posiciones legales de los dos reyes, o sea 3.612, en el tablero normal.

En el tablero de 8 × 8, y sin protección mutua, de 2 reyes del mismo color se podrán formar 1.806 coordinaciones diferentes, esto es, la mitad de las que se forman en el caso de 2 reyes de color distinto.

Igualmente se tiene una fórmula general

$$(2\ R) = 1/2\ (n - 1)\ (n - 2)\ (n^2 + 3n - 2)$$

para tableros de dimensiones cualesquiera.

Esto invita a dar una ojeada al ajedrez espacial: el número de posiciones legales de dos reyes se obtiene, sin dificultad, de las fórmulas dadas en el lugar correspondiente al ajedrez de tres dimensiones, y su expresión es

$$n^3\ (n^3 - 27) + 18n\ (3n - 2) + 8,$$

o sea 13.428, en el tablero de 5 × 5 × 5.

La fórmula

$$(3\ R) = 1/6\ (n - 1)\ (n - 2)\ (n^4 + 3n^3 - 20n^2 - 30n + 132)$$

sirve para resolver los problemas de 3 reyes de igual color.

Y de 4 reyes, también de igual color y sin protección mutua, se podrán formar

$$(4\ R) = 1/24\ (n^8 - 54n^6 + 72n^5 + 995n^4 - 2.472n^3 - \\ - 5.094n^2 + 21.480n - 17.112)$$

posiciones diferentes en un tablero de dimensiones cualesquiera.

Esta fórmula se publica por primera vez. La han hallado, independientemente uno del otro, el doctor K. Soltsien y el coautor de este libro K. Fabel.

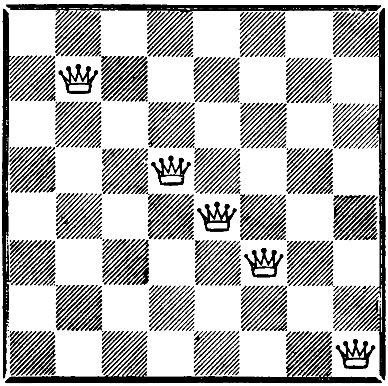
La dama

Los problemas referentes a esta pieza son más numerosos que los que conciernen al rey. Se han publicado muchos trabajos sobre el problema de las 5 damas, sobre el de las 16 damas y sobre el de las 8 damas, el cual es el más conocido. Para tener idea de ello, basta hojear los capítulos que tratan de este asunto en las obras "Mathematische Unterhaltungen und Spiele", de W. Ahrens, "Mathematical Recreations and Essays", de W. W. Rouse Ball, "Mathematical Recreations", de M. Kraitchik, y la antigua edición francesa "La Mathématique des Jeux".

Dentro de los límites de la presente obra podemos sólo reproducir una parte muy pequeña de toda la literatura, más o menos conocida, que versa sobre este asunto. Empezaremos por el problema mínimo o, por mejor decir, el del mínimo número de damas necesario y suficiente para abarcar todas las casillas del tablero.

Tras unos ensayos, se ve fácilmente que 4 damas no alcanzan a cumplir las condiciones del problema, pues habrá siempre unas casillas sin abarcar; pero con 5 damas es fácil cumplir dichas condiciones; y así, el número de coordinaciones que se pueden formar con estas cinco piezas es muy grande. El profesor Von Szily ha determinado, no sin muchos esfuerzos, 61 soluciones simétricas y 577 no simétricas; en suma, $61 \cdot 4 + 577 \cdot 8 = 4.860$ soluciones diferentes.

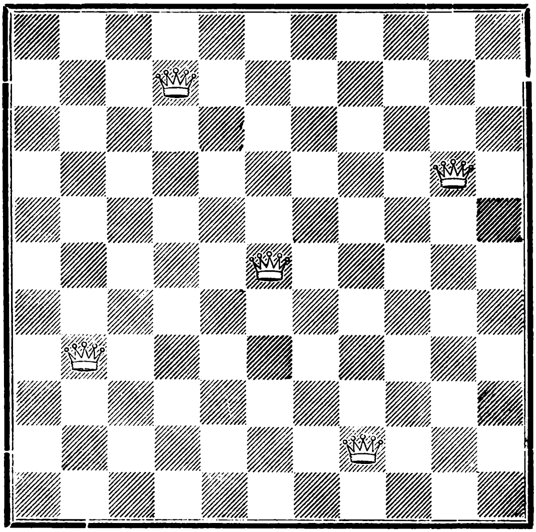
Diagrama núm. 19



En este diagrama figura una de tales soluciones. Las 5 damas pueden abarcar muchos escaques; por eso, tal número de ellas alcanza a resolver el problema en tableros de 9×9, de 10×10 y de 11 × 11 casillas. Desde luego, cuando la cantidad de estas piezas no varía, el número de soluciones será tanto menor cuanto mayores sean las dimensiones del tablero.

Una de las soluciones en un tablero de 11 × 11 casillas nos la ofrece este diagrama; en él, la coordinación de las damas es distinta, pues, como vemos, no se protegen unas a otras. Lo cual

Diagrama núm. 20



no sucede en la posición del diagrama anterior. Por lo tanto, debemos considerar "incluida" la casilla que ocupa cada una de ellas; si no, se necesitarían 6 damas.

Esta excepción es innecesaria en el tablero de 8 × 8 casillas, y no es difícil resolver el problema mínimo en los de mayores o menores dimensiones.

Pero es mucho más importante el asunto de colocar el mayor número posible de damas en el tablero normal, procurando que no se protejan mutuamente o, dicho de otro modo, que cada una no dé jaque a las demás. Nos referimos a un antiguo problema de ajedrez[2], que tuvo aceptación y aplauso, y atrajo la atención del destacado Loyd. Se conoce por el nombre de "Problema de las ocho damas". Y es realmente el máximo número de esta clase de

[2] Se publicó por primera vez en el "Berliner Schachzeitung" (1848).

piezas que se pueden colocar en el tablero normal, de suerte que abarquen todas las casillas y no se protejan mutuamente.

El doctor Nauck determinó 92 soluciones [3].

Para satisfacer el enunciado del problema, es claro que no se podrán colocar más de 8 damas, ni podrá haber más de una en cada horizontal. Por otra parte, teniendo en cuenta el considerable número de casillas que cada una ha de abarcar, las 92 soluciones o posiciones diferentes representan una cantidad respetable; cantidad que puede reducirse a 12 soluciones principales, y que figuran en este cuadro sinóptico:

Verticales		TD	CD	AD	D	R	AR	CR	TR
1.ª	permutación:	1	5	8	6	3	7	2	4
2.ª	”	1	6	8	3	7	4	2	5
3.ª	”	2	4	6	8	3	1	7	5
4.ª	”	2	5	7	1	3	8	6	4
5.ª	”	2	5	7	4	1	8	6	3
6.ª	”	2	6	1	7	4	8	3	5
7.ª	”	2	6	8	3	1	4	7	5
8.ª	”	2	7	3	6	8	5	1	4
9.ª	”	2	7	5	8	1	4	6	3
10.ª	”	3	5	2	8	1	7	4	6
11.ª	”	3	5	8	4	1	7	2	6
12.ª	”	3	6	2	5	8	1	7	4

Las coordinaciones primera y décima figuran en los diagramas 21 y 22, respectivamente. La décima tiene la particularidad de ser simétrica; quiere esto decir que no se producen 7 nuevas posiciones sino 3, por giro del tablero a 90°, a 180° y a 270° y por ser simétricas las nuevas posiciones que se obtienen por este procedimiento respecto a la posición principal. Las restantes que figuran en el cuadro, incluida la primera, no son simétricas y, por lo mismo, de cada una de ellas pueden derivarse 7 nuevas posiciones, que juntas ofrecen $11 \cdot 8 + 4 = 92$ posibilidades de coordinar.

En número 92 no se puede calcular, por cuanto aún no hay ninguna fórmula para hallar la cantidad de todas las coordinaciones posibles que se pueden formar con las 8 damas en un tablero normal o en otros tableros de mayores dimensiones, observando la condición de que ninguna proteja a las otras. De consiguien-

[3] "Illustrierten Zeitung" (1850).

te, no tendría sentido fiarse de la exactitud de dicho número.

L. Albrant intentó calcularlo[4]; pero K. Fabel ha rebatido tal intento, verdaderamente inútil[5].

Diagrama núm. 21

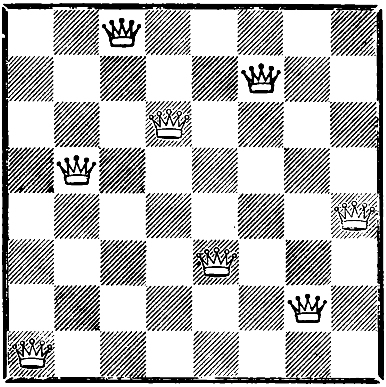
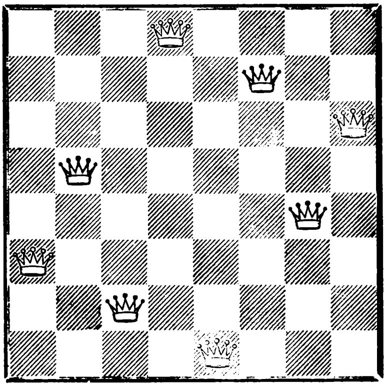


Diagrama núm. 22



Como se verá comprobado en el siguiente capítulo, se obtienen 8! = 40.320 soluciones en el problema de las 8 torres. De estas permutaciones se deben restar las 40.228 en que 2 o más piezas están colocadas en una misma diagonal, sea grande o pequeña. Si se inscriben las 40.320 posiciones como permutaciones, empezando por el número 1 y terminando en el 8 del cuadro sinóptico antecedente, se habrán de suprimir todas aquellas en que la diferencia absoluta entre dos cifras sea igual a la diferencia entre los lugares que ellas ocupan en el número. Veámoslo: la coordinación 3TD, 5CD, 7AD, 4D, 1R, 8AR, 6CR y 2TR se debería inscribir como permutación en dicho cuadro; mas debemos excluirla, porque la diferencia absoluta entre 3 y 8, o sea, 5, es igual a la diferencia entre los lugares que ocupan estas dos cifras (el 3 y el 8 ocupan respectivamente el lugar primero y sexto en la permutación citada, luego 6 — 1 = 5).

Este procedimiento es muy trabajoso; por ello, es preferible buscar las diversas posiciones a través de ensayos sistemáticos. Se han propuesto varios métodos para buscarlas, al igual que en la composición de problemas de los saltos de caballo. Por otra parte, la calculadora electrónica da exactamente 92 permutaciones si se

[4] "Europe Echecs" (septiembre y octubre de 1961).
[5] "Europe Echecs" (junio de 1962).

introduce en ella un programa para este fin. A más de esto, otros autores, dados a la fantasía, han descubierto toda suerte de relaciones entre las 12 soluciones principales; relaciones que carecen de fundamento matemático.

El problema de las 8 damas se ha investigado en tableros pequeños y grandes; es insoluble en los de 2 × 2 y 3 × 3 casillas, y los valores numéricos crecen rápidamente en los de mayores dimensiones. Se conoce el número de todas las coordinaciones posibles en los tableros de 4 × 4 hasta 15 × 15. Veámoslo:

Dimensiones del tablero	Número de coordinaciones	Dimensiones del tablero	Número de coordinaciones
4 × 4	2	10 × 10	724
5 × 5	10	11 × 11	2.680
6 × 6	4	12 × 12	14.200
7 × 7	40	13 × 13	73.712
8 × 8	92	14 × 14	365.596
9 × 9	352	15 × 15	2.279.184

Por medio de la calculadora electrónica, e independientemente uno del otro, H. B. Schwarzkopf y el doctor T. Lindelöf han hallado el número de coordinaciones que se pueden formar con 8 damas en el tablero de 12 × 12. El segundo nos ha facilitado los valores numéricos para tableros de mayores dimensiones, hallados con la calculadora.

Llama la atención el hecho de que en un tablero de 6 × 6 se pueden formar sólo 4 coordinaciones de 4 damas (1 simple solución principal simétrica).

Si se quieren colocar más damas en el tablero normal, habrán de reducirse las condiciones del problema. A tal reducción debe su existencia el problema de las 16 damas, cuyo enunciado reza así: Colóquense 16 damas en el tablero, de modo que haya dos damas y sólo dos en cada horizontal, vertical y diagonal. El presente diagrama ofrece una de las muchas soluciones posibles, y de las cuales pueden obtenerse varias por combinación de dos coordinaciones pertenecientes al problema de las 8 damas.

Si se prosigue aumentando la cantidad de estas piezas, se logrará satisfacer el enunciado del problema de colocar el mayor número posible de ellas en el tablero normal, procurando que una casilla, por lo menos, no sea abarcada por el conjunto de las mismas. Como puede verse en el presente diagrama, este problema se resuelve con 43 piezas de esta clase.

Es indudable que con menos damas se consiguirá que más de una casilla no sea abarcada; en el tablero normal se podrán colocar 8 damas, de forma que queden 11 escaques sin abarcar, lo cual demuestra este diagrama. Se conocen más posiciones de este tipo.

Diagrama núm. 23

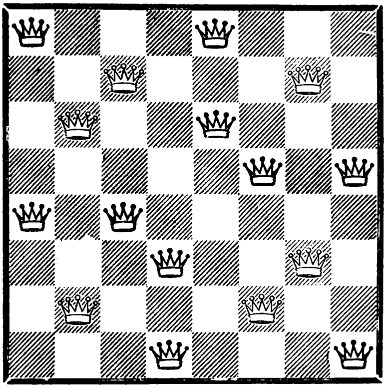
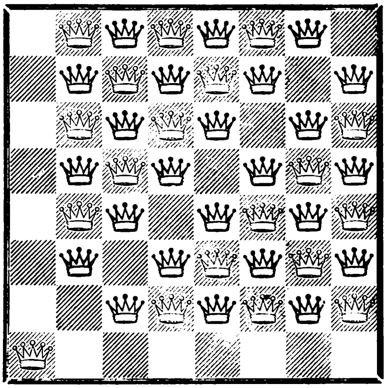


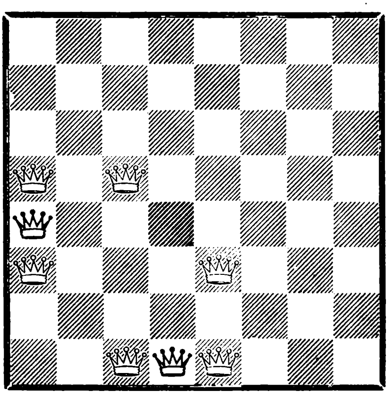
Diagrama núm. 24



Veamos ahora los interesantes problemas que plantean las posiciones formadas con 2 ó 3 piezas: ¿De cuántas maneras se podrán coordinar 2 damas de un mismo color en el tablero usual, de modo que se protejan mutuamente y que no se protejan?

En el primer caso, una pieza habrá de estar situada en un escaque, al que la otra pieza pueda llegar en un movimiento.

Diagrama núm. 25



Por lo tanto, podemos aquí emplear el número de todos los movimientos posibles que la dama puede efectuar, aunque este número se tendrá que dividir por 2, porque siempre habrá un par de movimientos que produzcan una misma coordinación; por ejemplo: el D1TD-8TR (de las blancas) y el D1TR-8TD (de las negras). Así, obtenemos 728 coordinaciones diferentes para la dama, con protección mutua.

En el segundo caso, al número de todas las posiciones factibles tendremos que restarle el de las posiciones ya calculadas. Según se ha demostrado con la fórmula general en el lugar oportuno, dos piezas distintas se pueden colocar de $64 \cdot 63 = 4.032$ maneras diferentes en el tablero de 64 casillas; si las dos piezas son iguales se podrán colocar de $4.032 : 2$ maneras diferentes; a este valor le restaremos las 728 coordinaciones diferentes, y obtendremos 1.288 posiciones distintas para la dama y sin protección mutua.

La fórmula para tableros de dimensiones cualesquiera es

$$(2\,D) = 1/6\,n\ (n - 1)\ (n - 2)\ (3n - 1).$$

Con tres damas se pueden plantear, a modo de ejemplo, el siguiente problema: Colóquense 3 damas blancas de tal modo que formen triángulo y que cada una esté protegida por las otras dos. ¿Cuántas coordinaciones se podrán formar? Respuesta: 864 en el tablero normal y, por lo general,

$$1/6\,n\ (13n^2 - 24n + 8) \text{ si } n \text{ es par, y}$$
$$1/6\,n\ (n - 1)\ (13n - 11) \text{ si } n \text{ es impar.}$$

Pero este otro problema es todavía más interesante: ¿De cuántas maneras diferentes se podrán colocar 3 damas de color igual en un tablero cuadrado de dimensiones cualesquiera, sin que cada una proteja a las otras? El resultado se obtiene mediante las siguientes fórmulas:

$$(3\,D) = 1/12\,n\ (n - 2)^2\ (2n^3 - 12n^2 + 23n - 10) \text{ si } n \text{ es par, y}$$
$$(3\,D) = 1/12\ (n - 1)\ (n - 3)\ (2n^4 - 12n^3 + 25n^2 - 14n + 1)$$
$$\text{si } n \text{ es impar.}$$

El problema de 4 o más damas todavía no se ha resuelto de un modo general.

Este asunto es tan interesante, que el eminente matemático E. Landau se tomó la molestia de establecer las dos fórmulas antecedentes [6].

---

[6] "Naturwissenschaftliche Wochenschrift" (2 de agosto de 1896).

La torre

Las coordinaciones formadas por torres del mismo color son mucho menos variadas que las que se pueden formar con las damas. En este caso el problema máximo coincide con el mínimo: en el tablero usual se necesitan, por lo menos, 8 torres para abarcar los 64 escaques, y no se podrán colocar más de 8 a fin de que no se protejan unas a otras, o no se den jaque.

Para satisfacer a las condiciones del problema mínimo, estas piezas se pueden situar en una misma línea o agruparlas según y como indica el presente diagrama. Respecto del problema máxi-

Diagrama núm. 26

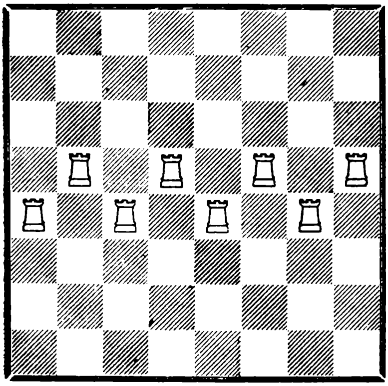
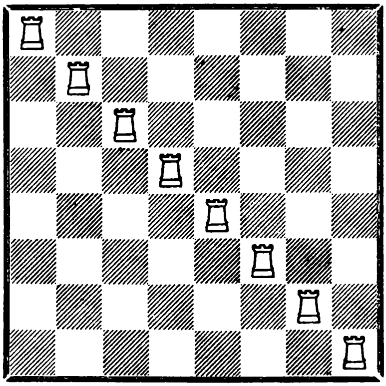


Diagrama núm. 27



mo, ya se ha dicho en el capítulo anterior que el número de soluciones en el caso de 8 torres es 8!, o sea, en el tablero corriente se pueden colocar 8 piezas de esta clase, como indica el presente diagrama, y formar con ellas 40.320 coordinaciones, sin que unas den jaque a las otras.

En su libro *Mathematical Recreations*, citado anteriormente, M. Kraitchik utiliza la diversidad de coordinaciones que pueden formarse con n torres es un tablero de $n \times n$ escaques, para demostrar matemáticamente las propiedades de los grupos o conjuntos. Se sirve de los giros dados al tablero y de la simetría para deducir de la solución principal las soluciones posteriores, y seguidamente clasifica las posiciones obtenidas según las características simétricas de las mismas.

El sencillo modo de caminar de la torre facilita relativamente calcular no sólo el número de coordinaciones que se pueden formar con 8 piezas sin protección mutua en el tablero común, sino también hallar una solución general del problema. Veámoslo: en un tablero de $n \times n$ casillas, m torres se pueden coordinar, sin protección mutua, de $\binom{u}{m}^2 \cdot m!$ maneras diferentes. Por ejemplo: en el caso de $m = 4$ se tendrán

$$\frac{64 \cdot 49 \cdot 36 \cdot 25}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 117.600$$

coordinaciones diferentes en el tablero normal. De ello se deducen fácilmente las siguientes fórmulas especiales: en un tablero de $n \times n$ casillas, con 2 torres que no se protejan mutuamente se forman

$$(2\,T) = 1/2\, n^2\ (n - 1)^2$$

coordinaciones, lo cual da 1.568 posiciones diferentes en el tablero corriente.

Y con 3 torres se formarán

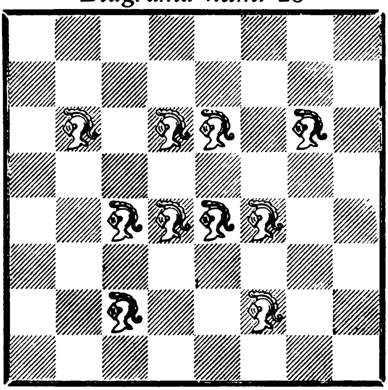
$$(3\,T) = 1/6\, n^2\ (n - 1)^2\ (n - 2)^2$$

coordinaciones.

El alfil

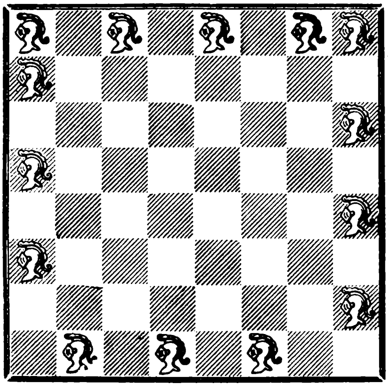
Las coordinaciones de varios alfiles son interesantes, por la circunstancia de que el movimiento de ellos está sujeto a cierto color de casillas. Para abarcar todas las del tablero de 8×8, esto es, para cumplir las condiciones del problema mínimo, son necesarios y suficientes 10 alfiles; 5 de casillas blancas y otros 5 de casillas negras. Lo cual muestra el presente diagrama.

Diagrama núm. 28



El mayor número posible de estas piezas que pueden coordinarse, con la condición de que unas no den jaque a las otras, es 14 en el tablero usual; una mitad recorre los escaques blancos y la otra mitad los negros. Veamos una de las diferentes maneras de coordinarlos. En este caso es necesario que estén colocados en las horizontales y verticales extremas (diag. 29). Cada grupo

Diagrama núm. 29



de 7 alfiles de casillas de un color da 16 coordinaciones diferentes; por lo tanto, los 14 alfiles darán 16 · 16 = 256 posiciones distintas. Si designamos por n el número de casillas del lado de un tablero cuadrado, $2(n - 1)$ será el de los alfiles que se pueden coordinar, sin que unos den jaque a los otros, y 2^n el de las posiciones que se formen con ellos, es decir, 14 y 256 en el tablero corriente.

Estimulado por el problema de las 8 damas, J. Perott averiguó las diversas maneras de colocar 8 alfiles en el tablero normal, pero sin protegerse mutuamente, y halló 22 522.960 formas de hacerlo. Cantidad dada por W. Ahrens en su obra *Mathematische Unterhaltungen und Spiele.*

La disminución del número de alfiles permite establecer fórmulas para determinar el de las coordinaciones que se pueden formar con ellos en tableros cuadrados de n^2 casillas, sin que se den mutuamente jaque. En el caso de 2 alfiles se tendrán

$$(2\,A) = 1/6\, n\ (n - 1)\ (3n^2 - n + 2)$$

posiciones diferentes, lo que representa 1.736 en el tablero normal.

En el de 3 alfiles hay dos fórmulas, que se deben a K. Fabel:

$(3\ A) = 1/12\, n\ (n - 2)\ (2n^4 - 4n^3 + 7n^2 - 6n + 4)$ si n es par, y $(3\ A) = 1/12\ (n - 1)\ (2n^5 - 6n^4 + 9n^3 - 11n^2 + 5n - 3)$ si n es impar.

Este caso puede variar un poco; veamos: ¿de cuántas maneras se podrán colocar 3 alfiles del mismo color en casillas cuyo color sea igual al de ellos, y sin protección mutua? Solución:

$$1/24\, n\ (n - 2)^2\ (n^3 - 4n^2 + 4n - 4) \text{ si } n \text{ es par, y}$$
$$1/24\, (n - 1)\ (n - 2)^2\ (n - 3)\ (n^2 + 1) \text{ si } n \text{ es impar.}$$

En estas fórmulas se han considerado las posiciones formadas, ya en los escaques blancos, ya en los negros.

En el caso de 4 alfiles consideraremos primero aquel en que unos den jaque a los otros: colóquense 4 alfiles de modo que formen rectángulo o cuadrado y cada dos de ellos den jaque a un tercero. ¿De cuántas maneras diferentes se podrán colocar? La fórmula general es

$$1/12\, n\ (n - 1)^2\ (n - 2).$$

Y en el de 4 alfiles, colocados sin que se den jaque en tableros de $n \times n$ casillas, siendo n par, la fórmula general para escaques de un color da

$$\frac{1}{5.760}\, n\ (n - 2)\ (n - 4)\ (15n^5 - 150n^4 + 560n^3 - 1.032n^2 + 1.108n - 696)$$

coordinaciones, y para casillas de cualquier color se tendrán:

$$(4\ A) = \frac{1}{360}\, n\ (n - 2)\ (15n^6 - 90n^5 + 260n^4 - 524n^3 + 727n^2 - 646n + 348)$$

coordinaciones.

Esta fórmula también se debe a K. Fabel.

El caballo

Su modo de andar hace que la solución del problema mínimo sea totalmente distinta de la del problema máximo.

En esta posición vemos que 14 caballos son necesarios y sufi-

Diagrama núm. 30

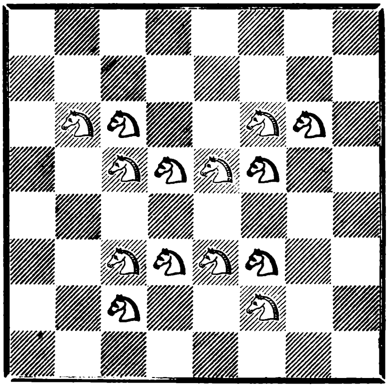
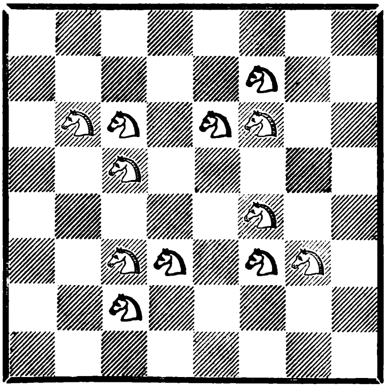


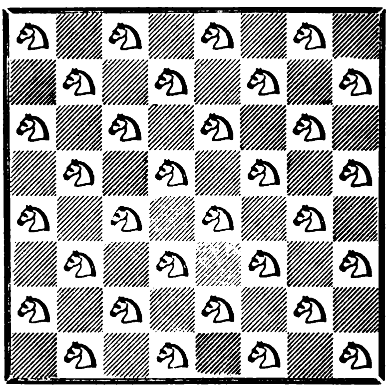
Diagrama núm. 31



cientes para abarcar todas las casillas del tablero normal (diag. 30). En el caso del rey hemos distinguido las posiciones en que los reyes se protegen mutuamente de aquellas en que no se protegen. Si en el de los caballos tampoco consideramos la condición de que uno esté protegido por otro, entonces economizaremos dos piezas y formaremos una posición, única e interesante, con 12 caballos (diag. 31); posición que no corresponderá del todo a la formada por 9 reyes (véase el diag. 14), por cuanto 4 de los caballos están protegidos doblemente.

Por el contrario, en el tablero usual se pueden colocar 32 caballos (diag. 32) en casillas de un color y sin protegerse unos a

Diagrama núm. 32



otros. Es claro que se obtendrán sólo 2 coordinaciones: una en los escaques blancos y otra en los negros.

En los tableros cuadrados, cuyo número de casillas sea impar, en el de 7×7 por ejemplo, se puede formar una sola coordinación con un máximo número de caballos, colocados de modo que no se den jaque o no se protejan unos a otros: para este fin se elige el color del escaque de una de las esquinas del tablero, y se van colocando las piezas en los $1/2\ (n^2 + 1)$ escaques del color que se ha elegido.

También hay fórmulas para calcular el número de coordinaciones que se pueden formar con varios caballos, ya con protección mutua o sin ella, en tableros de n^2 casillas. Por ejemplo: en el caso de 2 caballos sin protegerse uno al otro, se tiene la fórmula

$$(2\,C) = 1/2\ (n - 1)\ (n^3 + n^2 - 8n + 16)$$

que da 1.848 posiciones diferentes en el tablero normal, independientemente de si las dos piezas están colocadas en escaques de color igual o distinto.

Para hallar el número de las coordinaciones que se pueden formar con tres caballos, K. Fabel ha establecido esta fórmula

$$(3\,C) = 1/6\ (n - 2)\ (n^5 + 2n^4 - 23n^3 + 26n^2 + 222n - 540),$$

la cual no es valedera cuando n es inferior a 4 en tableros cuadrados.

En el caso de los 3 caballos se puede plantear este interesante problema: colóquense 3 caballos de modo que dos de ellos dan jaque o protejan al otro. ¿Cuántas coordinaciones diferentes podrán formarse? Respuesta: 836 en el tablero normal y, generalmente,

$$4\,(7n^2 - 35n + 41).$$

Esta fórmula sirve para hallar el número de cadenas de caballos a partir de n igual a 4. Si las cadenas se unen de suerte que formen cuadrado, esto es, que los caballos estén colocados a tresbolillo, se podrá resolver el siguiente problema: 4 caballos de un mismo color se deben colocar de tal modo que cada par de ellos dé jaque a un tercero. ¿Cuántas posiciones se podrán formar? Solución: 148 en el tablero usual, y, generalmente,

$$2\,(3n^2 - 18n + 26).$$

Es un poco difícil averiguar cuántas coordinaciones pueden formarse con 4 caballos sin que se de jaque en un tablero de n^2 escaques, particularmente cuando 2 caballos están situados en casillas blancas y 2 en casillas negras. K. Fabel ha establecido la siguiente fórmula para resolver este caso:

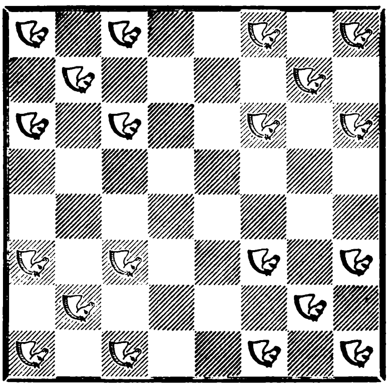
$$(4\,C) = 1/24\ (n^8 - 54n^6 + 144n^5 + 1.019n^4 - 5.232n^3 - \\ - 2.022n^2 + 51.120n - 77.184).$$

Esta fórmula es valedera cuando n es igual a 8 o mayor que **8.**

Piezas imaginarias

Antes de proseguir con las coordinaciones que pueden formarse con los peones, y dada la escasa diferencia que hay entre el caballo y el caballero nocturno, pieza imaginaria que marcha por las líneas de aquél, queremos detenernos y mostrar con el presente diagrama que el problema de las coordinaciones que

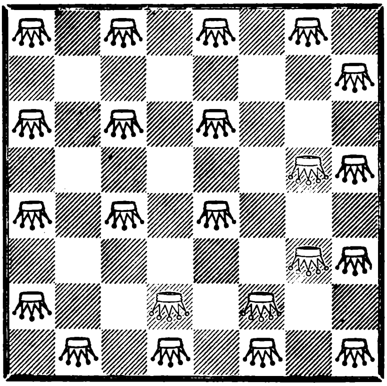
Diagrama núm. 33



pueden obtenerse con el mayor número posible de caballeros nocturnos, colocados de modo que no se protejan mutuamente, se resuelve con 20 piezas.

Esto también es aplicable al caso del saltamontes, otra de las piezas imaginarias más conocidas. Marcha por las líneas de la dama; puede saltar sobre una pieza o peón propios y adversarios, si se hallan sentados en el camino que recorre, y colocarse en la casilla situada detrás de ellos si no está ocupada por una pieza o peón propios. El máximo número (diag. 34) de piezas de esta clase que se puede colocar, de suerte que cada una no dé jaque a las otras, es 22 en el tablero normal. Con grupos de estas dos piezas imaginarias se pueden formar otras coordinaciones.

Diagrama núm. 34



El peón

Debido a su modo de marchar y a la escasa potencialidad para tomar piezas o peones adversarios, es impropio y casi imposible proponer aquí los mismos problemas que se han propuesto en el caso de las coordinaciones con grupos de otras piezas. Por ello, solamente trataremos de una serie de cuestiones que K. Fabel ya abordó [7]:

Con los dos peones TD pueden formarse 15 coordinaciones diferentes en las casillas comprendidas entre la 2TD de las blancas y la 2TD de las negras, si no sucede ninguna captura. Y con los 16 peones se formarán 15^8 coordinaciones diferentes. ¿Cuál será el tanto por ciento de coordinaciones de 8 peones colocados en las casillas blancas y de 8 situados en las negras?

Respuesta: en cada línea hay 3 posibilidades, es decir, en los escaques blancos de la misma pueden haber 0, 1 ó 2 peones. Por lo tanto, se podrán colocar 8 peones en las casillas blancas. Aplicando la regla de la combinatoria, se obtendrán 86.515 $\cdot$ 3^8 posiciones con los 8 peones de referencia ante las $5^8 \cdot 3^8$ posibles

[7] "Schwalbe" (diciembre de 1961).

coordinaciones de peones. Lo cual da aproximadamente un 22,15 % o 2/9.

En el siguiente cuadro sinóptico se exponen las coordinaciones con 16, 15, 14, 13, ... y 0 peones colocados en las casillas blancas:

Número de peones	Número de coordinaciones
16 ó 0	$1 \cdot 3^8$
15 ó 1	$24 \cdot 3^8$
14 ó 2	$260 \cdot 3^8$
13 ó 3	$1.680 \cdot 3^8$
12 ó 4	$7.210 \cdot 3^8$
11 ó 5	$21.672 \cdot 3^8$
10 ó 6	$46.928 \cdot 3^8$
9 ó 7	$74.280 \cdot 3^8$
8	$86.515 \cdot 3^8$

El doctor J. Bán propone el siguiente problema [8]:

En el tablero normal se colocarán 7 peones de tal modo que las 21 distancias existentes entre cada par de ellos sean diferentes, procurando atenerse a la legalidad de la marcha de las piezas. Hay varios centenares de soluciones. Veamos una: P3TD, P7TD, P6CD, P4AR, P7AR, P6TR y P7TR (de las blancas). En ningún caso será necesario usar la segunda horizontal (de las blancas).

Por medio de la calculadora electrónica, los aficionados a los problemas han demostrado que con 8 peones no se pueden satisfacer las condiciones de dicho problema.

Piezas cualesquiera

Lo que se plantea aquí es otra aplicación del teorema de Pitágoras, y se debe igualmente al doctor J. Bán [9]:

En un tablero de $n \times n$ escaques se colocarán 12 ó 16 ó 32 piezas, de suerte que la posición de cada una de ellas se halle a igual distancia geométrica de cierto punto del tablero. ¿Qué mínimos valores habrá de tener n?

---

[8] "Schwalbe" (agosto y septiembre de 1966, y junio y julio de 1967).

[9] "Schwalbe" (enero y marzo de 1967), y en "Stella Polaris" (diciembre de 1967).

Se elige el punto angular de una casilla, por ejemplo, el formado por la 4D y la 5R (de las blancas). Las 12 piezas necesitan un tablero de $n = 8$, las 16 uno de $n = 12$ y las 32 uno de $n = 48$, para cumplir las condiciones del problema. Y si se elige el centro de una casilla y se considera como centro del círculo, entonces se obtendrán más soluciones; a saber: 11, 17 y 67.

COORDINACIONES DE PIEZAS DIVERSAS

En los problemas referentes a esta clase de coordinaciones también se trata del abarcamiento de todas las casillas del tablero y de las posiciones en que las piezas se protegen mutuamente o unas dan jaque a las otras, además de los problemas de la posición y de las inmensas posibilidades de efectuar combinaciones con figuras distintas. Lo cual amplía el campo de las cuestiones que vienen ocupándonos.

Del extenso material de que se dispone sobre este tema, podemos ofrecer sólo algunas coordinaciones con el siguiente número de piezas:

Coordinaciones con 3 piezas

En primer lugar, veamos las posiciones legales, es decir, aquellas en que los dos reyes y otra pieza están en el tablero. Dicha pieza dispone de 62 casillas desocupadas en cada una de las 3.612 posiciones legales de los dos reyes; por lo tanto, con éstos y aquéllas se podrán formar 3.612 · 62 = 223.944 posiciones diferentes. Las cuales son factibles en una partida si la sobredicha pieza es dama o caballo; pero no lo son si la pieza de referencia es torre o alfil. Veámoslo:

En el caso de una torre negra habrá que restarle a la cantidad citada 6 posiciones ilegales; por ejemplo: las formadas por T1TD, R1CD y R6TD, y por T8TD, R7TD y R1AD; mas no la coordinación T8TR, R8CR y R3TR (diag. 35), por cuanto esta torre procede de la conversión de un peón.

Y en el caso del alfil, el número de posiciones en que se da ilegalmente jaque es 724 (diag. 36). Si el alfil (en este caso negro) está situado en la octava horizontal de su bando, ningún jaque se estimará ilegal, porque esta pieza puede proceder de un peón transformado en ella. Por el contrario, en la coordinación del alfil de 2TD a 7TD, de 8CD a 8CR y de 7TR a 2TR (estas casillas se consideran pertenecientes al bando blanco), las posiciones ilegales se producen de 7 en 7 y suman 126. Las restantes posiciones ilegales son: alfil negro 1TD y rey blanco 7CD = 55; alfil 1TD y rey 6AD = 54; alfil 1TD y rey 5D = 47; alfil 1TD y rey 4R = 42; alfil 1TD y rey 3AR = 37; alfil 1TD y rey 2CR = 32, y alfil 1TD y rey 1TR = 32. Así se producen 299 posiciones ilegales y se

Diagrama núm. 35

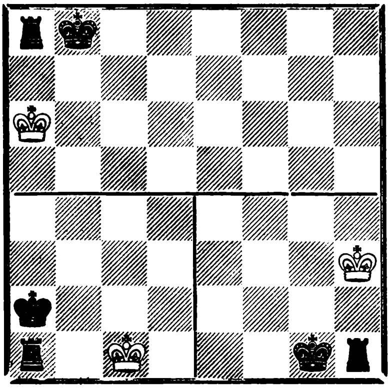
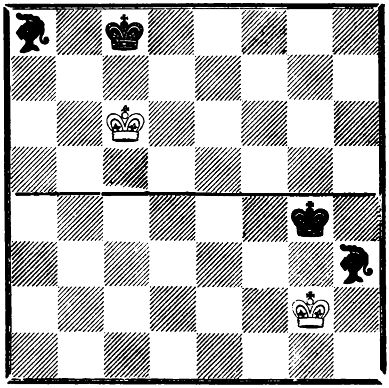


Diagrama núm. 36



obtienen otras tantas cuando el alfil negro está situado en la casilla 1TR.

Todas las coordinaciones posibles de los dos reyes y una pieza negra en una partida producen 223.944 posiciones diferentes con la dama, 23.938 con la torre, 223.220 con el alfil y 223.944 con el caballo.

Y las coordinaciones de los dos reyes y un peón negro dan sólo 167.248 posiciones. Si a las blancas les toca casi siempre mover primero en las coordinaciones de los dos reyes y una pieza negra, puede no ocurrir lo mismo en todas las posiciones con un peón negro. Por ello, hay que descontar 4 posiciones de rey ahogado retroactivas de la clase R8TD (blanco), R1AD o R2AD (negro) y P2TD, en las que el rey negro ha agotado su último movimiento; por lo tanto, quedarán 167.244 coordinaciones, donde les toque mover a las blancas.

Al determinar el número de coordinaciones con estas piezas cuando les toque mover a las negras, además de descontar las 8 posiciones de rey ahogado retroactivas (por ejemplo, R8TD (blanco), R1AD o R2AD (negro) y P2TD o R8TD (negro), R1AD (blanco) y P7TD) en las que el bando blanco ha agotado su último movimiento, habrá que restar otras 3.920 posiciones en que se da jaque al rey blanco. De consiguiente, quedarán 163.320 posiciones.

El procedimiento que se usa para determinar el número 167.248 es verdaderamente curioso. Veámoslo: el tablero se divide en dos zonas: la A, que se extiende desde la primera hasta la octava horizontal, y la B, que abarca el espacio comprendido entre las horizontales segunda y séptima. Cuando los dos reyes se hallan en A, se obtienen $(4 \cdot 14 + 12 \cdot 13) \cdot 48 = 10.176$ coordinaciones con estas dos piezas y un peón negro. Si están colocados en B, se obtendrán unas $(4 \cdot 44 + 20 \cdot 42 + 24 \cdot 39) \cdot 46 = 89.792$ coordinaciones, que no todas serán legales. Por último, si un rey se halla en A y otro en B, resultarán $(4 \cdot 46 + 12 \cdot 45) \cdot 47 \cdot 2 = 68.056$ coordinaciones. A la suma 168.024 habrá que restarle $12 \cdot 55 + 2 \cdot 58 = 776$ posiciones ilegales, en que el rey blanco está en la casilla 6TD o en la 6AD y el peón negro ocupa la 2CD, lo cual dará 167.248 coordinaciones.

El número de coordinaciones que se pueden formar en tableros cuadrados de cualesquiera dimensiones se halla por este mismo procedimiento, y su fórmula es

$$n\,(n^5 - 2n^4 - 11n^3 + 32n^2 - 8n - 22).$$

K. Fabel aporta el siguiente problema [1]: En el tablero normal colóquense los dos reyes y una pieza blanca, que puede ser una torre, un alfil o la dama. ¿En cuántas posiciones se podrá dar inmediatamente jaque a la descubierta?

Soluciones:

$$T = 2/3\, n\, (n - 1)\, (n - 2)\, (n - 3) = 1.120$$
$$A = 1/3\, (n - 1)\, (n - 2)^2\, (n - 3) = 420$$
$$D = 1/3\, (n - 1)\, (n - 2)\, (n - 3)\, (3n - 2) = 1.540.$$

Estas fórmulas son aplicables a tableros cuadrados de dimensiones discrecionales.

Con esta clase de coordinaciones, K. Fabel confrontó un caso de posiciones ilegales [2]: En un tablero de $n \times n$ escaques coordínense una torre, un alfil y un caballo, de modo que cada pieza esté protegida por otra. ¿Qué número de coordinaciones se podrá formar?

Solución: O el alfil protege a la torre, ésta al caballo y éste al alfil o el caballo da protección a la torre, y así sucesivamente. En cada caso se obtendrán

$$8\,(2n - 3)\,(2n - 5)$$

posiciones diferentes. Lo cual supone 1.144 en el tablero normal.

---

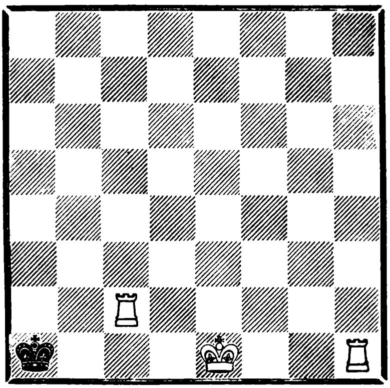
[1] "Schwalbe" (marzo de 1965).
[2] "Schwalbe" (diciembre de 1952).

Coordinaciones de 4 piezas

En este lugar expondremos primeramente una posición única en su género, y cuyo autor es K. Fabel[3]:

Con el rey blanco, dos torres del mismo color y el rey negro se puede formar una sola posición, en la que las blancas mueven y dan mate de 4 maneras diferentes. Hállese la solución en el presente diagrama.

Diagrama núm. 37



Casi tan sencilla como en el precedente es la solución de este problema de W. Keym[4]:

Con los dos reyes y otras dos piezas blancas diferentes fórmense todas las posiciones en que sea posible el mayor número de lances de mate en un movimiento.

Si con la combinación dama y torre se obtienen sólo 8 movimientos de mate, con las coordinaciones R6C, D6D o D4AR y P7AR (de las blancas), y R1TR (de las negras) y sus dos posiciones simétricas se obtendrán 4 soluciones de 9 movimientos de mate en cada una de ellas.

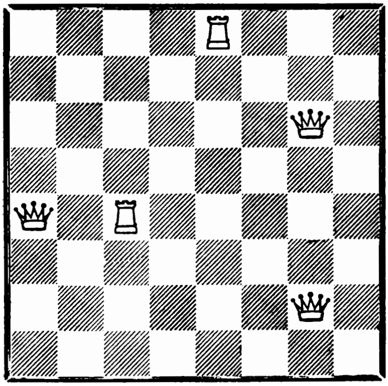
Coordinaciones de 5 piezas

En el capítulo anterior hemos analizado el problema de las 5 damas, en que este número de piezas es necesario y suficiente para abarcar todas las casillas del tablero de 8 × 8. Sin

[3] "Schwalbe" (diciembre de 1937).
[4] "Allgemeine Zeitung", Maguncia, 31 de diciembre de 1970.

embargo, con 3 damas y 2 torres también se cumplen las condiciones de dicho problema (diag. 38).

Diagrama núm. 38

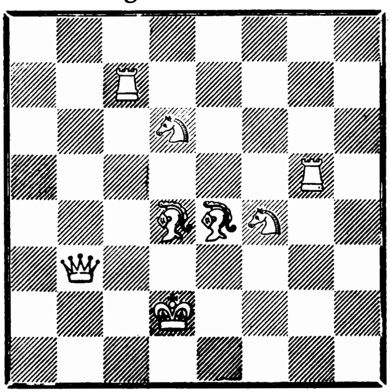


Coordinaciones de 8 piezas

Por su escaso valor omitimos las coordinaciones de 6 y de 7 piezas, y nos proponemos dilucidar las posiciones que pueden formarse con las 8 piezas, que constituyen el grupo completo de uno de los dos bandos.

Para este fin, nos remitimos a un pretérito problema referente al espacio del tablero, cuyo autor es M. Bezzel[5].

Diagrama núm. 39



[5] "Schachzeitung" (1848).

Se trata de coordinar las 8 piezas, de suerte que con ellas se pueda efectuar el mayor número posible de movimientos. Por más vueltas que se le den, nos encontraremos con que no se pueden hacer más de 100 movimientos, a consecuencia de la falta de espacio. El presente diagrama muestra la mejor posición que se puede formar en tales condiciones; en ella es fácil ver que las 8 piezas no abarcan los 64 escaques del tablero, el 8D para citar un ejemplo, ni se protegen unas a otras, fuera del alfil situado en 4R.

Si intentamos agruparlas de modo que abarquen todas las casillas, veremos que siempre habrá una sin abarcar; pero esta dificultad no es insorteable, pues basta colocar los alfiles en casillas de un mismo color (diag. 40).

La idea opuesta al problema que acabamos de ver consiste en coordinar las 8 piezas, procurando que abarquen el menor número posible de casillas, lo cual da 16 casillas (diag. 41).

Diagrama núm. 40

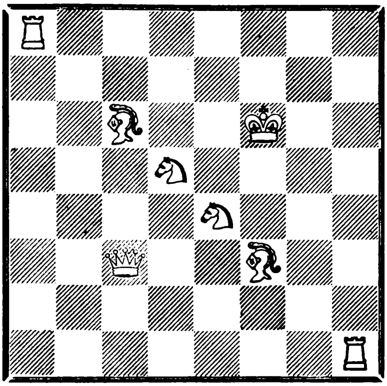
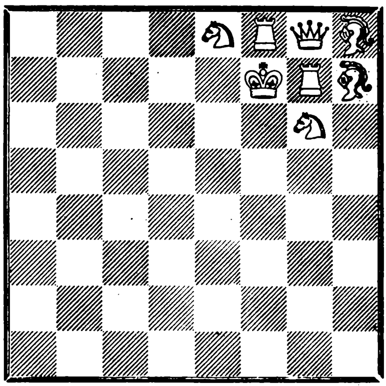


Diagrama núm. 41



En esta posición vemos que los alfiles están situados en casillas de color distinto; pero también pueden estarlo en escaques de un mismo color, lo cual se logra haciendo que la dama cambie de asiento con el alfil 8TR.

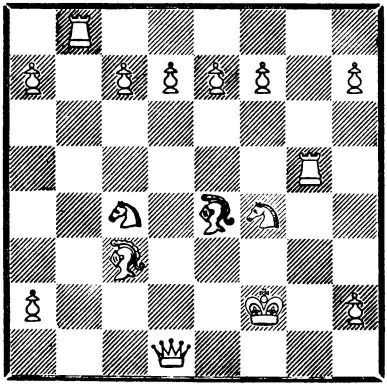
Coordinaciones de 16 piezas

Se ha intentado ampliar el problema de Bezzel hasta 16 figuras (véase el diag. 39). En este aspecto, Petrovič[6] batió la marca

[6] "Schwalbe" (noviembre y diciembre de 1949).

al formar la posición que figura en el diagrama núm. 42. Para calcular el número de movimientos, será necesario multiplicar por cuatro cada movimiento que los peones de la séptima horizontal

Diagrama núm. 42



hagan hacia la octava, pues cada uno de ellos tiene varias posibilidades de convertirse en pieza mayor. El cálculo da 122 movimientos.

Coordinaciones de más piezas

En su libro *Amusements in Mathematics*, H. E. Dudeney propone el siguiente problema:

En el tablero normal colóquese 8 damas, 8 torres, 14 alfiles y el mayor número posible de caballos, procurando que se cumplan estas condiciones:

1) En cada horizontal, vertical y diagonal no podrá haber más de una dama.

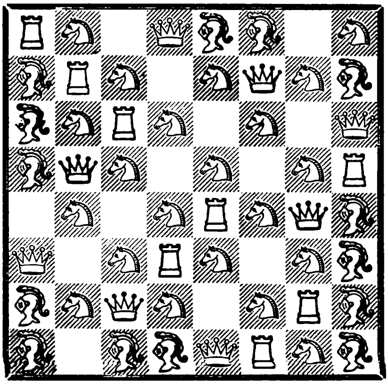
2) En cada horizontal y vertical no podrá hallarse más de una torre.

3) Las diagonales no podrán tener más de un alfil.

4) Ningún caballo deberá proteger a otro.

El diagrama núm. 43 muestra que con 21 caballos se cumplen las condiciones del problema. En cada color de casillas tiene que haber 4 damas y 7 alfiles. Si se muda a las torres de los escaques blancos a los negros, se dispondrá de otros 21 escaques para coordinar un número igual de caballos.

Diagrama núm. 43



Coordinaciones de varias piezas

Hay un curioso y sencillo problema referente a un grupo de amigos que están bebidos. Tras haber corrido una juerga, se despiden y cada uno se pone el sombrero del otro. Se pregunta: ¿cuántas coordinaciones diferentes pueden obtenerse? A veces, este problema se asemeja al caso de cierto cartero que tiene que depositar *s* cartas en *s* buzones; en cada buzón hay una carta, pero ninguno contiene la que le corresponde. En ajedrez, esto se podría plantear así: colóquense las 5 piezas blancas R, D, T, A, y C en los escaques 1TD, 1CD, 1AD, 1D y 1R, con la condición de que ninguna ocupe el que le corresponde ocupar al comienzo de la partida. ¿Cuántas coordinaciones de esta clase podrán formarse?

Es fácil ver que de las $5! = 120$ coordinaciones con las 5 piezas, muchas no se podrán formar por causa de las condiciones antedichas. Por lo tanto, el número de tales queda reducido a 44.

La fórmula general para resolver el problema de distribuir *s* piezas entre *s* escaques, o *s* sombreros entre *s* personas, cumpliendo las condiciones citadas, es

$$s! \sum_{n=2}^{s} (-1)^n \cdot \frac{1}{n!}.$$

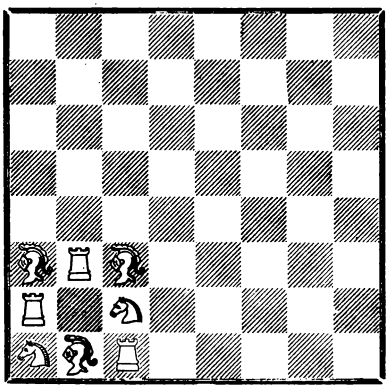
En este contexto queremos recordar que C. E. Kemp[7] trató

[7] "Chess Amateur" (enero de 1929).

el caso particular de las coordinaciones que se pueden formar con 8 piezas blancas en la primera horizontal; pero las condiciones de su problema son más exigentes: no hay ninguna diferencia entre las dos torres, entre los dos alfiles o entre los dos caballos; quiere esto decir que ninguna de las dos torres se puede colocar en los escaques 1TD y 1TR. Como la fórmula anterior no es aplicable a este caso, y como la falta de espacio no nos permite establecer la que le corresponde, damos solamente el resultado: se pueden formar 772 coordinaciones diferentes.

Veamos otro interesante problema de este autor; problema que hasta aquí había permanecido inédito en esta forma general: coordínense *n* piezas, de modo que formen un círculo o una cadena cerrada. Estas *n* piezas deben coordinarse de *k* maneras diferentes, procurando que 2 piezas idénticas no ocupen escaques contiguos; los lindantes con un ángulo del tablero no se tendrán por contiguos.

Diagrama núm. 44



Aquí se nos ofrece un ejemplo de una de tales coordinaciones, en que *n* es igual a 8 y *k* igual a 3 (T, A y C). ¿Cuántas coordinaciones podrán formarse?

La fórmula general, desarrollada por Kemp, es

$$C = (-1)^n \cdot (k-1) + (k-1)^n,$$

por lo que el número de coordinaciones buscado será

$$(-1)^8 \cdot 2 + 2^8 = 258.$$

Más coordinaciones de 3 piezas

Antes de poner punto a este capítulo ofrecemos al lector unos problemas de esta clase que se publicaron después de haber salido a la luz la primera edición de este libro.

U. Handschin aporta los siguientes problemas [8]:

¿Cuál será la longitud del lado del tablero cuadrado si en él se forman con los dos reyes y una torre blanca 3 919.608 posiciones, en que las blancas mueven y dan mate?

¿Qué longitud habrá de tener el lado del tablero cuadrado para que en él se puedan formar con los dos reyes y un peón blanco 1 002.992 posiciones, en las cuales el bando blanco mueve y da mate?

El primer caso se resuelve con la fórmula

$$4\,(n^3 - 2n^2 - n + 2),$$

en que n es igual a 100.

Y el segundo caso, la solución se halla por la fórmula

$$n^2 + 3n - 8,$$

donde n es igual a 1.000.

F. Hoffmann contribuye con este problema [9]:

¿Cuánto mide el lado del tablero cuadrado en el cual la dama blanca, un caballo de este color y el rey negro pueden formar 312.926 posiciones, en las que las blancas mueven y dan mate?

En la fórmula para resolverlo

$$24\,(2n^2 - 5n + 1),$$

n es igual a 82.

K. Fabel propone este problema [10]:

Si se colocan el rey negro y dos torres blancas en cualesquiera casillas de un tablero de $n \times n$, ¿qué valor tendrá n si la diferencia entre el número de posiciones en que no se da jaque al rey y el de aquellas en que se le da jaque es $5n^2$?

Aquí, la igualdad

$$n^4 - 8n^3 + 13n^2 - 4n - 12 = 0$$

da la solución entera $n = 6$. Por lo tanto, habrá 10.800 — 180 = = 10.620 posiciones en que se dé jaque al rey.

---

[8] "Schwalbe" (junio y julio de 1965).
[9] *Ibídem* (agosto y septiembre de 1966).
[10] "Schwalbe" (diciembre de 1968).

¿CUANTAS...?

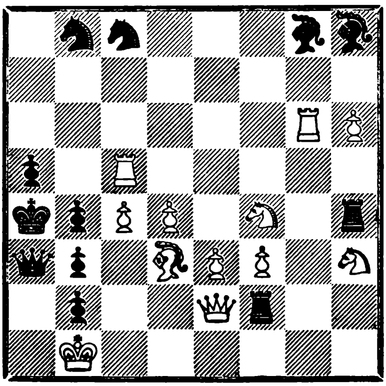
En este capítulo y en los dos siguientes se dilucirán los problemas matemáticos referentes a las posiciones legales o, por mejor decir, normales y otros problemas de cierta singularidad.

En éste se propondrá hallar, por ejemplo, el número de variantes, de soluciones o de movimientos fundamentales de un problema. Aquí conviene precisar la índole de los enunciados en cuanto al número de variantes que se deberá hallar. Para este fin, un procedimiento lógico es quizás tener en cuenta el modo de efectuar los movimientos de las blancas; pero, aún así, no se podrá precisar totalmente cuándo dos de los movimientos en cuestión deberán considerarse diferentes. En todo caso, se considerarán como variantes distintas únicamente las dos series de movimientos que se distinguen en la sucesión de los mismos.

Todo lo cual se irá aclarando en el análisis de los dos primeros problemas, que vamos a proponer seguidamente.

J. K. Hannemann dedicó este problema a A. C. White[1]:

Diagrama núm. 45



[1] "Schwalbe" (octubre de 1935).

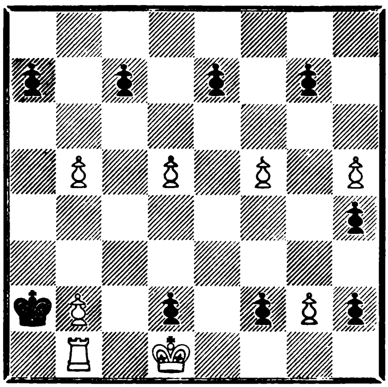
¿En cuántas variantes se produce automate en 7 movimientos?

Las blancas hacen **1. T7AD,** con el fin de tomar en los 6 siguientes movimientos las dos torres (en 5 casillas y en otras 5), los dos alfiles (en 5 y en 4 casillas) y los dos caballos (en 3 y en 4 casillas) del adversario. Las piezas negras están independizadas unas de otras; por este motivo, el bando blanco puede tomarlas dentro de 6! sucesiones de movimientos, lo cual da la cantidad de $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6! = 4\,320.000$. Pero este número contiene muchas variantes duales; eliminarlas es un asunto muy penoso y carece de valor matemático. El autor de este problema calcula que habrá unas 150.000.

El método de cálculo más preciso sería contar sólo las variantes no duales que contengan el número de movimientos más completo; pero con uno no tan preciso se pueden determinar igualmente las esenciales con un número de movimientos más completo: si el bando blanco tiene varias posibilidades, se contará sólo aquella en que la totalidad de las variantes sea mínima.

O. Riihimaa propone este problema [2]:

Diagrama núm. 46



¿En cuántas variantes y series de movimientos se producen tablas por rey ahogado en 9 movimientos?

Las blancas hacen **1. R2A** y, luego, van tomando los peones negros. De acuerdo con lo dicho antes acerca de cuándo dos movimientos de las blancas deben considerarse diferentes, resultan varias cantidades. Si los P5CD × P3T o P5CD × P4T a. p. se

[2] "Schach-Echo" (enero de 1958).

estiman iguales, resultarán $8! = 40.320$ variantes; si no, se tendrán $2^4 \cdot 8! = 645.120$, porque pueden suceder 4 tomas de peón a. p. Y si en dichas tomas se distingue, además, la clase de la pieza que se ha tomado, se tendrán $4^3 \cdot 2^4 \cdot 8! = 41\,287.680$ variantes diferentes, por cuanto 3 peones tienen 4 posibilidades de convertirse en pieza. Esta cantidad es, al propio tiempo, la respuesta a la pregunta sobre las series de movimientos enunciadas en el problema.

En el aspecto matemático, apenas si tiene valor el número de los diversos movimientos fundamentales de un problema, por ser relativamente pequeño. Los tres problemas siguientes ilustran lo dicho.

Diagrama núm. 47

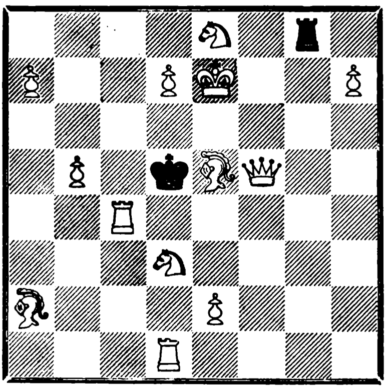
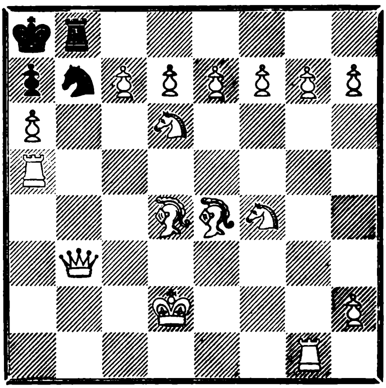


Diagrama núm. 48



En esta posición, de J. C. West[3], se puede dar mate y hacerlo de 47 maneras diferentes; mas con la condición de que ninguno de los tres peones blancos lo dé al entrar en la octava horizontal, convirtiéndose en pieza mayor (diag. 47).

En esta posición de E. Luukkonen[4] se propone dar mate en 2 movimientos; el primero se puede realizar de 117 maneras diferentes que representan los 117 movimientos fundamentales; en ellos no se podrán realizar ninguna conversión de peones (diag. 48).

V. Pentti Sola compuso este trabajo, con motivo de una promoción de estudiantes en la universidad de Helsinki[5] (diag. 49).

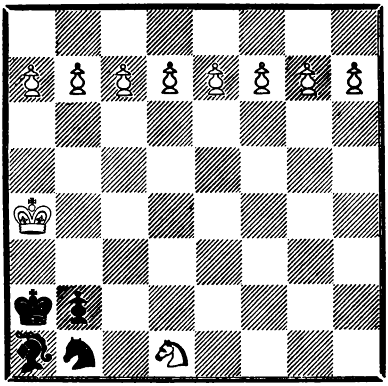
---

[3] "Chess Monthly" (1880).
[4] "Uusi Suomi" (1936).
[5] "Uusi Suomi" (31 de mayo de 1936).

En él se pide dar mate en 2 movimientos, y el número de los fundamentales es $8 \cdot 4 + 1 = 33$.

Todas estas cantidades merecen distinguirse por ser las más elevadas que se han obtenido.

Diagrama núm. 49



Los problemas sobre el automate, las tablas por rey ahogado y las series de movimientos son más valiosos que los mencionados hasta aquí. Si estimamos diferentes todas las series que se distinguen de algún modo en las sucesiones de movimientos, resultará fácil proponer interesantes problemas matemáticos, y cuya solución requiere con frecuencia la ayuda de la combinatoria.

Cuando todas las piezas determinan la posición final, cada serie se distinguirá por el recorrido de las mismas, por la conversión de peones y por la sucesión de los diversos movimientos. Las complicaciones proceden de la dependencia recíproca de los movimientos.

Cuando los del bando blanco son independientes de los del negro, el número de series del primero se habrá de multiplicar por el de las del segundo. El otro extremo se presenta cuando los movimientos del bando, al cual le toca mover, determinan claramente los del bando contrario; en tal caso se tendrá que calcular sólo el número de series del que toca jugar. Entremedias, hay casos en que los movimientos de ambas partes dependen parcialmente unos de otros; en ellos se puede proceder, bien restando después el número de las series irrealizables, bien usando el procedimiento de clasificación por medio de la elección de un movimiento apropiado para tal fin; este procedimiento se usa para resolver dos problemas que se proponen en el capítulo siguiente.

Los dos métodos citados también sirven cuando los movimientos de piezas de un mismo color dependen unos de otros.

En esta posición, de O. Riihimaa[6], las negras hacen tablas por rey ahogado en 7 movimientos (diag. 50).

Diagrama núm. 50

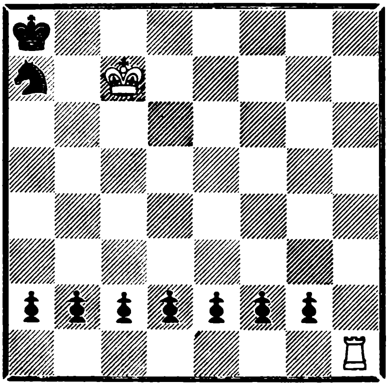
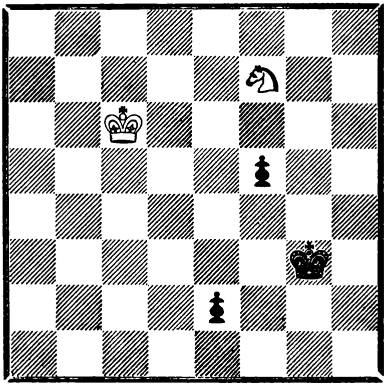


Diagrama núm. 51



Hállese el número de soluciones. Los peones negros pueden llegar a la octava horizontal en 6! sucesiones diferentes, con la condición de que el TD sea el último en hacerlo. Los siete peones tienen la posibilidad de sucumbir en calidad de dama, de torre, de alfil o de caballo; por lo tanto, el número de estas posibilidades será 4^7 y el de soluciones $4^7 \cdot 6! = 11\,796.480$.

En esta otra posición inédita, también de O. Riihimaa, el bando negro mueve y contribuye a que le den mate en 6 movimientos.

Hállese el número de soluciones. Una solución es **1. R7AR, R5C; 2. R8R, R4T; 3. P5A, R3C; 4. P6A, R2A; 5. P7A, C5R; 6. P8A=D, C3D** mate. Primero, supongamos que los dos bandos juegan independientemente uno del otro. Como el movimiento **6. ..., C3D** sucede forzosamente en último lugar, las posibilidades combinatorias del bando blanco están limitadas por los 5 primeros movimientos. De consiguiente hay $\binom{5}{1}$ posibilidades de fijar el instante en que debe suceder el movimiento **5. ..., C5R.** En cada una de estas posibilidades, el rey blanco dispone de 19 recorridos para ir de la casilla 6AD a la 2AD, lo cual se deduce fácilmente:

[6] Presentada en el torneo de soluciones de problemas, organizado por la Suomen Tetäväniekat (1962).

se anota el número de recorridos del rey por las casillas intermedias de su marcha según el conocido procedimiento del triángulo de Pascal. Así, se obtendrán $19 \cdot \binom{5}{1} = 95$ maneras de efectuar los movimientos de las blancas (diag. 51).

En el juego de las negras se debe tener en cuenta que puede ocurrir un encuentro en el escaque 7AR. Primero, se puede calcular aproximadamente el número de posibilidades, suponiendo que el rey y el peón ocupan a la vez el escaque antedicho y, después, restar el número de las series de movimientos irrealizables. Este número resulta ser el producto de las cantidades de todas las series de movimientos del bando negro, realizables antes y después del encuentro en el escaque de referencia. Puesto que el peón AR puede transformarse de 4 maneras distintas, se obtendrán

$$4 \cdot \left[\binom{6}{2} - \binom{4}{1}\binom{2}{1}\right] = 28$$

series de movimientos de las negras.

Pero el juego de uno y otro bando no discurre independientemente. Todas las series de movimientos que empiezan con **1. R7AR, R5D; 2. R8R, R4R** son ilegales o anormales. Como en la continuación hay 3 posibilidades de fijar el instante en que debe suceder el salto del caballo blanco al punto 5R y 4 posibilidades de transformar el peón negro, el número de estas series de movimientos prohibidos es $3 \cdot 4 = 12$. De consiguiente, el número de soluciones buscado es

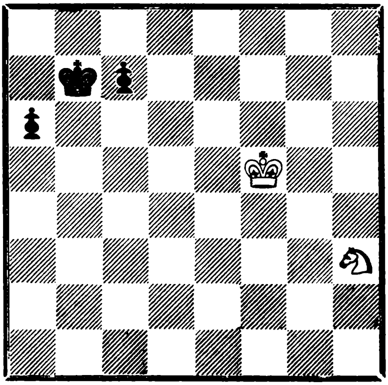
$$95 \cdot 28 - 12 = 2.648.$$

O. Riihimaa propone este problema inédito (diag. 52):

El bando negro mueve y se da automate, o mate a sí mismo. Hállese el número de soluciones.

Una de ellas es **1. R1TD, R6R; 2. P4T, R7D; 3. P5T, R×P; 4. P6T, R8A; 5. P7T, C4A; 6. P8T=T, C5D; 7. T8-2T, C6C** mate. Para deducir aquí el número de todas las soluciones lo más fácil es distribuirlas proporcionalmente según el número del "movimiento crítico" *n*R7D×P2AD. El bando blanco tiene $n - 1$ movimientos de tiempo para realizar los dos de su rey, dispuestos con antelación, de modo que dispone de $\binom{n-1}{2}$ series de movimientos hasta que suceda *n*R7D×P2AD. Y el negro tiene n movimientos de tiempo para efectuar el R1TD y, por ende, $\binom{n}{1}$ posibilidades de hacerlo.

Diagrama núm. 52



Después del movimiento crítico, todavía hay que determinar si al R7-8AD le corresponde el número $n + 1$, o el $n + 2$, o ... 6, con lo cual se tendrán $\binom{6-n}{1}$ opciones a mover. De consiguiente, el número de soluciones con nR7D × P2AD está representado por el producto

$$\binom{n-1}{2}\binom{n}{1}\binom{6-n}{1}.$$

Pues los valores de n pueden ser 3, 4 y 5, el número de soluciones buscado es

$$\sum_{n=3}^{5}\binom{n-1}{2}\binom{n}{1}\binom{6-n}{1}= 63.$$

En los tres siguientes problemas es interesante no sólo la manera de solucionarlos, más también su resultado.

O. Riihimaa dedicó este problema a E. Bonsdorff, con motivo del trigésimo-séptimo aniversario del nacimiento de éste[7] (diagrama 53):

[7] "Helsingin Sanomat" (19 de octubre de 1958).

Las negras juegan y contribuyen a que se les dé mate en tres movimientos. ¿Cuántas soluciones hay?

Aquí, $3 \cdot 2 \cdot 3! = 36$ series de movimientos ocasionan el mate en la casilla 1TR de las negras; por ejemplo: **1. R1T, A1A; 2. A1C, A3D; 3. C1A, A3A** mate. El bando blanco tiene 3 posibilidades de ocupar con el alfil de casillas blancas su diagonal 1CD-7TR, y el negro puede coordinar sus movimientos de 3! maneras, en lo cual el caballo dispone de 2 saltos: a la casilla 1AR y a la 4CR. A más de esto, hay la solución especial **1. R3A, R2A; 2. R4R, P4A+**; 3. **R5D, A2A** mate.

Diagrama núm. 53

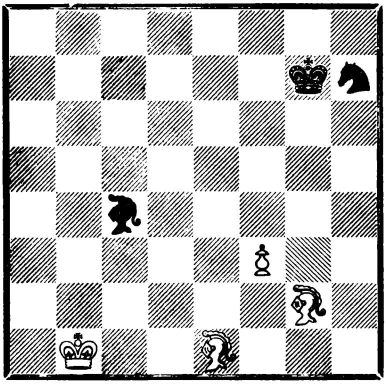
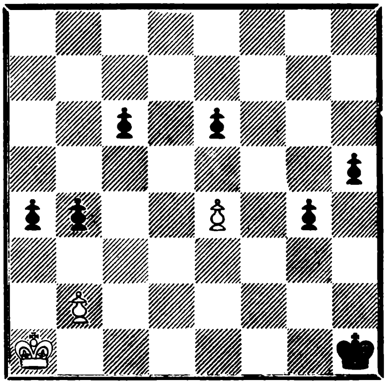


Diagrama núm. 54



O. Riihimaa propone este problema [8] (diagrama 54):

Las blancas juegan, y las negras se dan automate en 7 movimientos. Hállese el número de soluciones.

El bando blanco puede hacer primero P5R, o bien, P3C, P×PT, P5T, P6T, P7T y P8T=D o A, mientras el negro prepara su propio mate con P4AD, P6CR, P7CR, P8CR=A, P5T, P6T y P7T. El número de soluciones buscado es

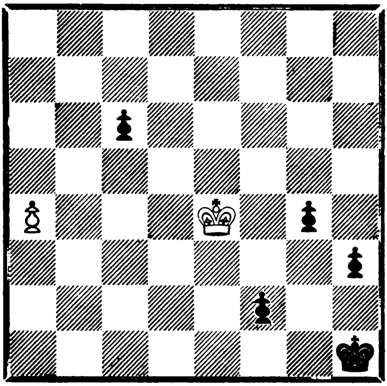
$$2 \cdot \binom{7}{1} \cdot \frac{7!}{3! \cdot 3!} = 1.960.$$

K. Fabel publicó esta miniatura del diagrama núm. 55 [9]. En ella se produce automate en 5 movimientos, y tiene 1.000 soluciones. El peón blanco llega a la casilla 8TD y se convierte en dama o en

[8] "Schwalbe" (enero de 1960).
[9] "Heidelberger Tageblat" (8 de octubre de 1970).

alfil. El rey blanco y el peón negro 3AD (5 posibilidades) tendrán que ser retirados de la diagonal 8TD-1TR, mientras el rey negro

Diagrama núm. 55

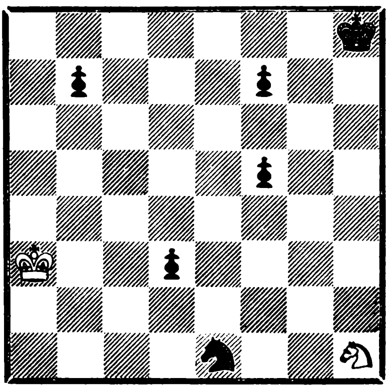


se cortará su propia retirada con los movimientos P6C, P7C, P8C=A y P7T. El número de soluciones es

$$2 \cdot 5 \cdot \binom{5}{1} \cdot \frac{5!}{3!} = 1.000.$$

Los encuentros que ocurren entre piezas de un mismo color constituyen un tema fácil de exponer en los problemas de series de movimientos, en las cuales sólo mueve el bando blanco. En el

Diagrama núm. 56



problema del diagrama 51 hemos empleado con fortuna el procedimiento de no considerar primero los encuentros posibles y de restar luego las series irrealizables; si dicho problema ha presentado un solo encuentro, los que se proponen seguidamente presentan varios de ellos.

O. Riihimaa plantea este problema [10], en el cual el rey negro se ahoga a sí mismo en 14 movimientos. Hallar el número de soluciones (diag. 56).

Hay dos posiciones: la reflejada en el diagrama y esta misma, pero con el caballo situado en la casilla 5TR de su bando.

En el primer caso, una solución es, por ejemplo: del movimiento **1.** al **5. R3TD - 7R - ×P2AR** y del **6.** al **14. C1TR - ×P4AR - ×P2CD - ×C8R - 5CR,** y el número de ellas es

$$\binom{14}{5}-\binom{7}{2}\binom{7}{3}-\binom{6}{3}\binom{8}{2}=707,$$

donde los tres términos del primer miembro representan el número de series de movimientos en que el rey y el caballo blancos pueden encontrarse a la vez en las casillas 5AD o 6D, 5AD y 6D, respectivamente.

Y en el segundo caso, una solución es: del movimiento **1.** al **5. R3TD - 7R - ×P2AR** y del **6.** al **14. C1TR - ×P6D - ×P2CD - ×C5TR - C5R.**

En este caso, al contrario del primero, es posible que los dos encuentros se presenten uno tras otro. Como el número de tales se restará en los dos términos correctivos y, finalmente, habrá que volver a sumarlo, el número de soluciones será

$$\binom{14}{5}-\binom{5}{2}\binom{9}{3}-\binom{8}{3}\binom{6}{2}+\binom{5}{2}\binom{3}{1}\binom{6}{2}=772.$$

O. Riihimaa plantea este otro problema, en que el rey negro se ahoga por sí mismo en 17 movimientos [11]. Hállese el número de soluciones (diag. 57).

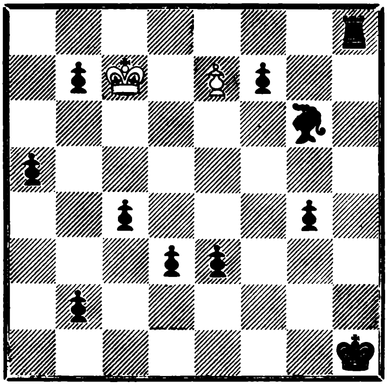
Tal se obtiene por variaciones efectuadas en las sucesiones de movimientos de la solución: del movimiento **1.** al **4. R7AD - 3CR, 5. P8R=**C y del **6.** al **17. C8R - ×P2CD - ×P4T - ×P7CD - ×P6D - ×P2AR - ×T1TR - 2R.** La conversión del peón en dama no es

[10] "Schwalbe" (diciembre de 1961).

[11] Con él participó en el torneo de soluciones de problemas, organizado por la Suomen Tethäväniekat (1962).

suficiente para satisfacer el enunciado del problema, aunque tal conversión ocasiona algunas posiciones de tablas por rey ahogado, de diversas clases y en 18 movimientos.

Diagrama núm. 57



El contenido fundamental de este problema consiste en los tres encuentros que se pueden presentar uno tras otro en los puntos 6D, 5R y 4AR (del bando blanco). Generalizando un poco el procedimiento usado para resolver el problema, del cual es imagen el diagrama 56 y cuya admisibilidad se verifica al instante, tendremos

$$\binom{17}{4}-\binom{3}{1}\binom{14}{3}_d-\binom{10}{2}\binom{7}{2}_e-\binom{15}{3}\binom{2}{1}_f+$$
$$+\binom{3}{1}\binom{7}{1}\binom{7}{2}_{de}+\binom{3}{1}\binom{12}{2}\binom{2}{1}_{df}+\binom{10}{2}\binom{5}{1}\cdot$$
$$\cdot\binom{2}{1}_{ef}-\binom{3}{1}\binom{7}{1}\binom{5}{1}\binom{2}{1}_{def}=510.$$

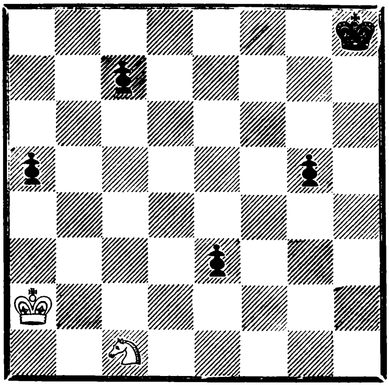
El subíndice de cada término representa el producto del coeficiente binómico correspondiente a cada uno de los encuentros.

Esta miniatura se debe a H. Th. Kuner[12]; en ella se producen tablas por rey ahogado en 13 movimientos. ¿Cuántas soluciones hay? (diag. 58).

[12] "Schwalbe" (octubre y noviembre de 1962).

El rey blanco deberá ocupar la casilla 7AR y el caballo del mismo color la 5CR. Pueden presentarse 4 encuentros seguidos. Aquí es posible hacer otra generalización del procedimiento antedicho, aunque resulta penosa. Es más sencillo considerar separada-

Diagrama núm. 58



mente la serie **1. R3C, 2. R4A** de la **1. C3C, 2. C×PT,** y proceder luego del mismo modo que se ha procedido en el problema anterior (diag. 57). En el caso de **1. R3C** resulta

$$165 - (1 \cdot 56 + 6 \cdot 10 + 36 \cdot 2) + (1 \cdot 3 \cdot 10 + \\ + 1 \cdot 15 \cdot 2 + 6 \cdot 3 \cdot 2) - 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 = 55.$$

Y en el caso de **1. C3C** se tiene

$$462 - (3 \cdot 56 + 20 \cdot 10 + 126 \cdot 2) + (3 \cdot 3 \cdot 10 + \\ + 3 \cdot 15 \cdot 2 + 20 \cdot 3 \cdot 2) - 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 = 88.$$

Por lo tanto, hay 143 soluciones.

O. Riihimaa presenta este trabajo inédito (diagrama 59):

Las blancas mueven y dan mate en 13 movimientos. Hállese el número de soluciones.

La posición en que se da mate está formada por R6TD, P7TD y P7CD. El movimiento R5C-6T se puede hacer en el noveno, décimo o undécimo lugar de la serie.

El primer caso da $\binom{8}{4} \cdot 1 = 70$ series de movimientos diferentes, el segundo $\frac{9!}{4! \cdot 4! \cdot 1!} \cdot 1 = 630$ y el tercero $\binom{11}{4}\binom{6}{3} =$

= 6.600. En el tercer caso, el primer factor representa las series que determinan la posibilidad de las sucesiones recíprocas de movimientos del rey y del peón CD, y el segundo factor es el valor real de estas sucesiones (R4A-5C sucede en el último movimiento). El número de soluciones buscado es

$$70 + 630 + 6.600 = 7.300.$$

Diagrama núm. 59

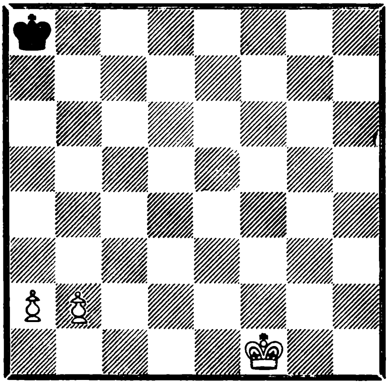
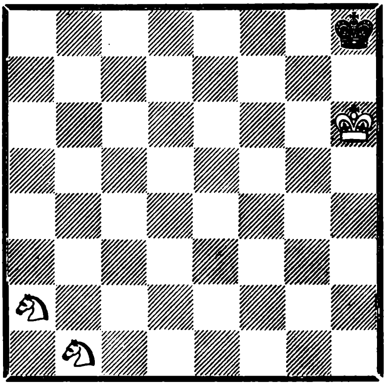


Diagrama núm. 60



Ernst Lücke aporta este problema [13] (diagrama 60):

Las blancas juegan y dan mate en 7 movimientos. Búsquese el número de soluciones.

Un caballo en el escaque 7R o en el 6AR y el otro en el 7AR o en el 6CR forman la posición en que se da mate al rey negro. Estas dos piezas tienen varios recorridos; la que ha de dar jaque, bien la 2TD o bien la 1CD, cuenta con $12 + 7 = 19$, y la otra con $3 + 3 = 6$, si es la 2TD, y con $1 + 3 = 4$, si es la 1CD. De consiguiente, se tendrá primero $\binom{6}{3} \cdot 19 \cdot (6 + 4) = 3.800$; a esta cantidad se le deben restar 688 series de movimientos en que se presentan encuentros. Por lo tanto, el número de soluciones será

$$3.800 - 688 = 3.112.$$

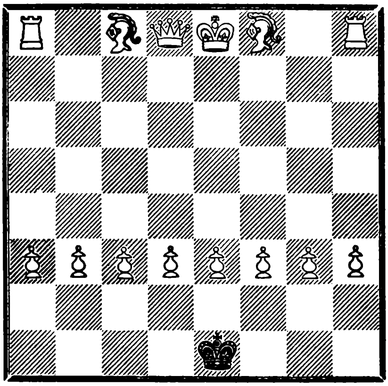
Antes de dar punto final a este capítulo veamos dos problemas sencillos, propuestos por O. Riihimaa:

[13] "Schwalbe" (mayo de 1964).

En esta posición[14] suceden tablas por rey ahogado en 36 movimientos. Hallar el número de soluciones.

Las torres se colocarán respectivamente en los puntos 8CD y 8CR; los seis peones, situados en medio de la fila que forman,

Diagrama núm. 61



avanzarán hacia la séptima horizontal, y los dos de las verticales extremas del tablero también avanzarán y se convertirán en alfiles. El número de soluciones pedido es

$$\frac{36! \cdot 5^2}{4!^6 \cdot 6!^2} \approx 0,94 \cdot 10^{29}.$$

Los factores 5 del numerador provienen de los seis movimientos de cada torre y de los correspondientes a cada peón de las columnas extremas que permiten 5 sucesiones diferentes.

El cálculo da

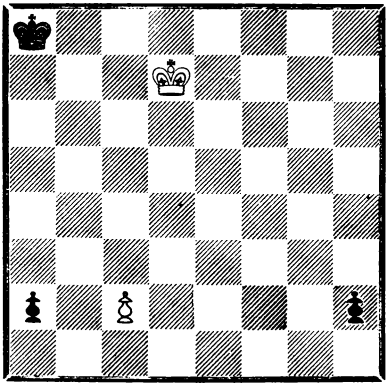
93.873 436.053 649.778 225.700 000.000.

Esta cantidad es extraordinariamente grande; si convirtiésemos la longitud de cada serie en 6 cm², podríamos cubrir más de 100.000 000.000 de veces la superficie de la Tierra. Pero aún puede ser mayor, para lo cual basta situar la torre en el punto 7TD en vez de hacerlo en el 8CD. Si bien esta modificación menoscabaría la homogeneidad de la posición y del cálculo.

[14] "Schwalbe" (marzo de 1962).

Las negras mueven y se dan automate o, por mejor decir, contribuyen a que se lo den en 5 movimientos [15]: ¿De cuántas maneras se pueden coordinar los movimientos?

Diagrama núm. 62



Una solución es **1. P8TR=A, P4A; 2. A2CD, P5A; 3. P8T=A, P6A; 4. A5D, R7A; 5. A2T, P×A** mate, y su expresión numérica es 21. Esta cantidad se halla por el simple procedimiento de ir anotando los movimientos, sin necesidad de recurrir al cálculo matemático. Mas si se prefiere recurrir a él, se puede establecer una fórmula para hallarla, tomando en consideración el movimiento crítico *n*P6A.

$$\sum_{n=3}^{4} \binom{n-1}{2} \binom{n}{2} = 21.$$

[15] "Helsingin Sanomat" (20 de junio de 1965).

PARTIDAS DEMOSTRATIVAS BREVES

Las posiciones que se presentan en la apertura de una partida pueden, por lo general, proceder de series de movimientos dispares. Cuando sucede así, es comprensible que se pregunte: ¿Cuál será el mayor número de partidas demostrativas breves? Desde luego, la respuesta es más teórica que práctica, porque tales incluyen en sí aquellas series de movimientos que no acontecen en ninguna partida común, debido a su baja bondad.

O Riihimaa publicó dos ejemplos de ellas (véanse los diagramas 63 y 64) con el título "Unas cifras de la teoría de las aperturas". Son tan sencillos, que no presenta ninguna dificultad hallar la solución.

Lo mismo se podrá preguntar en el caso de un problema confeccionado para este fin, y cuyo primer ejemplo se ofrece en el diagrama 65.

Si el número de series de movimientos es pequeño, el mejor procedimiento para hallarlo es ir contándolas una por una; esto demuestra que las partidas demostrativas en que aquellas suceden son breves o pobres de variantes.

Mas si el número que se busca es grande, entonces este procedimiento no sirve, y la solución se ha de obtener a través de una expresión matemática que caracterice la posición correspondiente. En este caso, dicha expresión es el contenido principal del problema, cuyo tema radica en los métodos de la teoría de las combinaciones que se empleen. Realmente es fácil demostrar algunos problemas de la combinatoria, mediante la solución de los referentes a las partidas demostrativas, pues las ramificaciones de las series de movimientos se pueden variar con relativa facilidad y en la forma conveniente. A este respecto véanse los diagramas 69 y 70.

Los problemas que se proponen seguidamente no entrañan ninguna dificultad en hallar el número de todas las partidas demostrativas.

O. Riihimaa propone hallar el número de todas las partidas demostrativas breves[1]:

---

[1] "Schach - Echo" (septiembre de 1956).

Esta antigua posición del gambito de dama se produce al sexto movimiento de las negras. El bando blanco dispone de $\frac{6!}{3! \cdot 2!} = 60$ series de movimientos, y el negro de $\frac{6! \cdot 3}{2! \cdot 4!} = 45$. Las negras pueden efectuar los 4 movimientos del flanco de su rey en 3 sucesiones diferentes.

Diagrama núm. 63

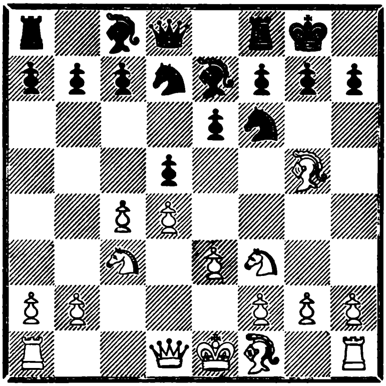
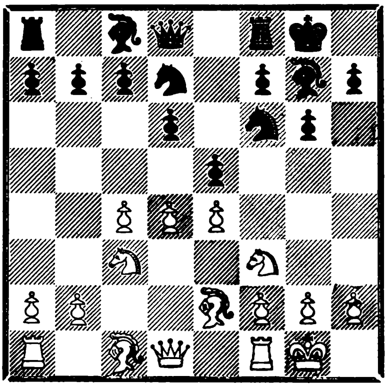


Diagrama núm. 64



El número que se busca es $60 \cdot 45 = 2.700$.

O. Riihimaa propone igualmente hallar el número de las partidas demostrativas breves [2]:

Esta posición de la defensa india clásica se forma al séptimo movimiento de las negras. Cada bando dispone de $\frac{7! \cdot 3}{2! \cdot 4!} = 315$ series de movimientos. De consiguiente, la solución será $315^2 =$ $= 99.225$.

E. Bonsdorff compuso este problema, con motivo de Año Nuevo de 1960. En él se pide buscar el número de partidas demostrativas breves cuando mueven las blancas y cuando lo hacen las negras.

En el primer caso, cada bando ha ejecutado 10 movimientos:

$$\frac{10!}{2! \cdot 2!} \cdot \frac{10!}{2! \cdot 2!} = 823.011\,840.000.$$

[2] *Ibídem.*

Y en el segundo caso, las primeras han hecho 11 movimientos y las segundas 10. En las series de movimientos de éstas no se ha producido ninguna variación; por el contrario, aquéllas han regalado un movimiento. El primer término de la expresión, encerrada dentro del paréntesis, se forma cuando el peón TD o el R

Diagrama núm. 65

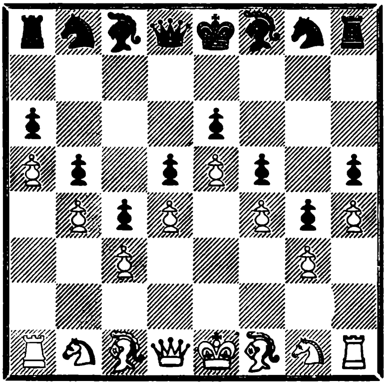
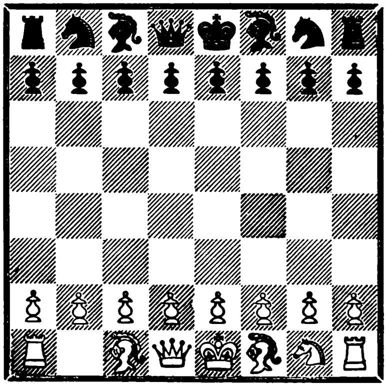


Diagrama núm. 66



ha efectuado 3 movimientos, y el segundo cuando uno de los peones CD, D, AR o TR ha hecho 2 movimientos:

$$\left(2 \cdot \frac{11!}{2! \cdot 3!} + 4 \cdot \frac{11!}{2! \cdot 2! \cdot 2!}\right) \cdot \frac{10!}{2! \cdot 2!} = 24\,141.680\,640.000.$$

O. Riihimaa plantea este problema[3]: Hállese el número de partidas demostrativas breves.

Aquí se distinguirán dos casos: la posición del diagrama, y esta misma posición, pero con el caballo blanco situado en la casilla 1CD.

Cada bando ha movido 4 veces.

En el primer caso sucede **2. ..., C3AR×C5D** o **2. ..., C3AR×C4R; 3. T1CD** o **3. C3AR,** o bien **3. C3TR.**

Solución: 2 · 3 = 6.

En el segundo caso, la posición es simétrica con referencia a las series de movimientos anteriores y permite, además, hacer la inversión final **4. C(6AD)8CD, C3TD×C8C,** en la que el bando blanco y el negro pueden jugar de 2 y de 12 maneras, respectivamente.

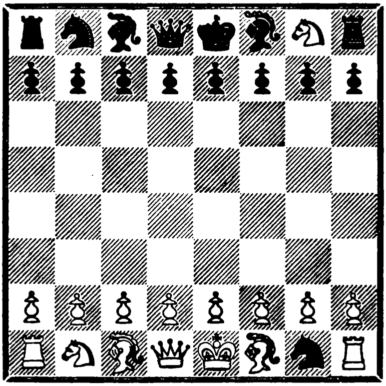
[3] "Schwalbe" (septiembre de 1961).

Solución: $6 + 2 \cdot 12 = 30$.

En este caso se tienen 24 posibilidades más que en el primero, lo cual se debe a que en él la jugada C(4R)6AR+ es anexa al jaque.

O. Riihimaa propone hallar el número de partidas demostrativas breves si los dos bandos han perdido el derecho a enrocar largo[4]:

Diagrama núm. 67



Cada bando ha efectuado 9 movimientos. El caballo blanco 1CR dispone de 3 recorridos de 5 movimientos cada uno para llegar a 8CR, pero no debe pasar por el punto 6AR; los demás movimientos de las blancas son C3TD o 3AD, T1CD, T1TD y C1CD. Por lo tanto, el número de series de éstas será $3 \cdot 2 \cdot \frac{9!}{4! \cdot 5!}$. Este valor corresponde igualmente a las negras, y puede presentarse un encuentro si las blancas efectúan sus 5 primeros movimientos en el flanco de rey y las negras ejecutan sus 4 primeros en el de dama porque, en estos casos, las primeras tomarán el caballo 1CR de las segundas. De consiguiente, la cantidad buscada es

$$\left(\frac{6 \cdot 9!}{4! \cdot 5!}\right)^2 - (3 \cdot 2)^2 = 571.500$$

[4] Con este problema concurrió al torneo de soluciones de problemas, organizado por la Suomen Tehtäväniekat (1962).

Niilo Saarnio contribuye con este trabajo[5] (diagrama 68): Hállese el número de partidas demostrativas breves.

Esta posición se produce al cuarto movimiento de las blancas, que pueden jugar de 11 maneras; a saber: **1. P4R, 2. D2R** (3); **1. P4R, 2. D3A** (4); **1. P4R, 2. D5T** (3), y **1. P3R** (1). Y las negras

Diagrama núm. 68

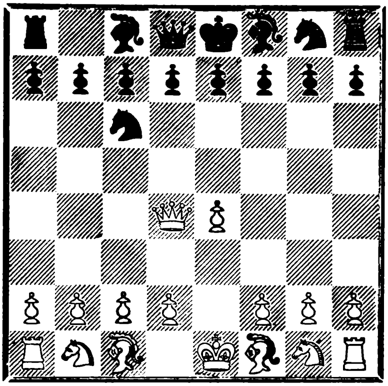
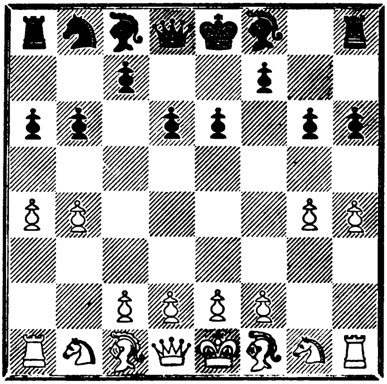


Diagrama núm. 69



pueden hacerlo de 14 maneras; véase: **1. ..., C3TD** (2); **1. ..., C3AD** (8); **1. ..., C3AR** (2), y **1. ..., C3TR** (2). No obstante la brevedad de la partida, se presentan sorprendentemente 6 encuentros: **1. P4R, C3AD** o C3AR; **2. D3AR, C3AR** o C3AD (2), **1. P4R, C3AD; D5T, C4R** (3), y **1. P3R, C3AD; 2. D4C, C5D** (1).

La solución buscada es $11 \cdot 14 - 6 = 148$.

O. Riihimaa presenta este problema inédito (diagrama 69): Hallar el número de partidas demostrativas. Se distinguirán dos casos: la posición reflejada en el diagrama y esta misma posición, pero con el caballo negro colocado en la casilla 1CR.

Este problema es un ejemplo del método que conviene a menudo seguir en la selección del movimiento característico entre la totalidad de los que se efectúan en una partida demostrativa breve y en la clasificación posterior de las partidas de esta clase según el lugar de la sucesión en que se efectúa el movimiento seleccionado en calidad de "crítico".

Las dos posiciones en cuestión se forman al octavo movimiento de las blancas; además, un alfil blanco debe tomar el caballo y el 3AD, 3AR negro y regresar a su punto de partida.

---

[5] "Helsingin Sanomat" (6 de abril de 1963).

En el primer caso, el movimiento crítico es el A2CD×C3AR y, según eso, se determinará primero el número de aquellas partidas demostrativas breves en que el movimiento A2CD×C3AR sea exactamente el m-ésimo de las blancas. Al cual deben preceder los P4CD y A(1A)2CD de las blancas y el C3AR de las negras, y suceder los A6AR-2CD y A2CD-1AD también de las blancas, al paso que los 3 movimientos restantes de éstas y los 6 restantes de las negras podrán efectuarse en cualquier sucesión. Dentro del margen m — 1, se puede fijar de $\binom{m-1}{2}$ maneras el instante en que los movimientos P4CD y A1A-2CD deban preceder al movimiento crítico de las blancas.

Por lo tanto, hay $\binom{m-1}{1}$ posibilidades de fijar el número de los movimientos A6AR-2CD y A2CD-1AD de las blancas y $\binom{8-m}{2}$ posibilidades de fijar el C3AR de las negras. De consiguiente, el número de partidas demostrativas, en que A2CD×C3AR sucede en el m-ésimo movimiento, es

$$3! \cdot 6! \cdot \binom{m-1}{2} \cdot \binom{m-1}{1} \cdot \binom{8-m}{2},$$

y, como A2CD×C3AR ha de ser el movimiento tercero, cuarto, quinto o sexto, el número de partidas buscado será

$$3! \cdot 6! \cdot \sum_{m=3}^{6} \binom{m-1}{2} \cdot \binom{m-1}{1} \cdot \binom{8-m}{2} = 846.720.$$

En el segundo caso, el movimiento crítico es el m-ésimo A2CR×C3AD. Pero como a la retirada del alfil blanco de la casilla 6AD ha de suceder primero el P3D de las negras, es conveniente introducir aquí otro movimiento crítico, el n-ésimo A6AD-2CR, para fijar las ideas. Ahora, de los 8 movimientos de las blancas y de los 7 de las negras, los P4CR y A1A-2CR de las primeras y el C3AD de las segundas deben preceder al m-ésimo A2CR×C3AD, y el A2CR-1AR de aquéllas y el P3D de éstas deben suceder al n-ésimo movimiento crítico A6AD-2CR, al paso que los 3 movimientos blancos y los 5 negros restantes podrán efectuarse en cualquier sucesión. Y así, el número de partidas que se busca es

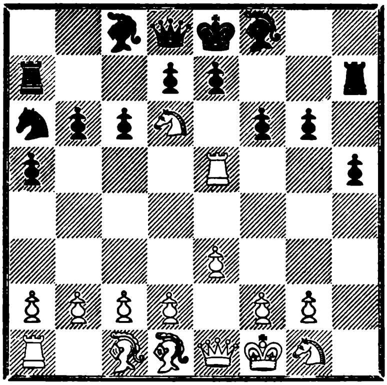
$$3! \cdot 5! \cdot \sum_{m=3}^{6} \left[\binom{m-1}{2} \cdot \binom{m-1}{1} \cdot \sum_{n=m+1}^{7} \binom{8-n}{1} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \binom{8-n}{1} \right] = 256.320.$$

El siguiente y último problema de este capítulo es más extenso. Con todo, las condiciones son parecidas a las de éste, por lo que bastará añadir algunas indicaciones para resolverlo.

O. Riihimaa propone este otro problema [6]:

Diagrama núm. 70



Hállese el número de partidas demostrativas breves.

Esta posición no se produce antes de **12. C6D** mate y, por ello, las posibilidades de variar terminan en el undécimo movimiento de las negras. Consideremos que la partida ha comenzado, por ejemplo, con la serie **1. P4TR, C3AR; 2. P5T, C×P; 3. T×C, P3AR; 4. T5R, P4TR.** Es conveniente emplear el m-ésimo movimiento C×P y el n-ésimo T5R en calidad de movimientos críticos, en lo cual se tendrá en cuenta que *m* representa los valores 2, 3, ... 8 y *n* los *m* + 2, *m* + 3, ... 10. Si se considera que los dos movimientos del peón blanco TR deben preceder al m-ésimo movimiento C×P, pero antes de que haya sucedido el n-ésimo movimiento T5R, al paso que se eligirá de $\binom{7}{2}$ mane-

[6] Con él participó en el torneo de soluciones de problemas, organizado por la Suomen Tehtäväniekat (1962).

ras el instante en que se deben ejecutar los dos movimientos del caballo que anteceden a **12. C6D** mate entre los 7 movimientos no mencionados de las blancas, en lo cual el caballo tiene 4 posibilidades de ejecutarlos, se obtendrá primero el producto que representa las series de movimientos de las blancas:

$$\binom{m}{2} \cdot \binom{n-m-1}{1} \cdot \binom{7}{2} \cdot 4.$$

Con respecto de las negras debe tenerse en cuenta que el C3AR precede al m-ésimo movimiento C×P, y los P4TR y T2TR suceden al n-ésimo T5R de las blancas, mientras que el P3AR no debe efectuarse antes del m-ésimo movimiento C×P, y en cuyo espacio de tiempo ya se habrán elegido los P4TR y T2TR. En cuanto a los otros 6 movimientos de éstas se pone la condición de que el P4TD preceda a los C3TD y T2TD. Y así, el producto

$$\binom{m-1}{1} \cdot \binom{12-n}{2} \cdot \binom{9-m}{1} \cdot \frac{6!}{3}$$

representa las series de movimientos de las negras.

Y el número de partidas demostrativas buscado será

$$\binom{7}{2} \cdot 4 \cdot \frac{6!}{3} \cdot \sum_{m=2}^{8} \left[\binom{m}{2} \cdot \binom{m-1}{1} \cdot \binom{9-m}{1} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \sum_{n=m+2}^{10} \binom{n-m-1}{1} \cdot \binom{12-n}{2}\right] = \binom{7}{2} \cdot 4 \cdot \frac{6!}{3} \cdot$$

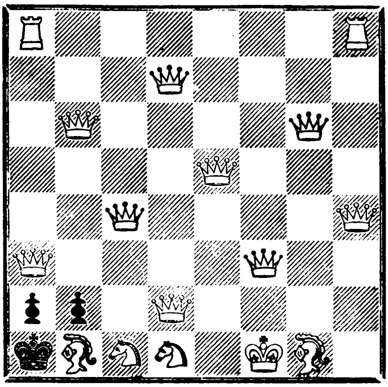
$$\cdot \sum_{m=2}^{8} \binom{m}{2} \cdot (m-1) \cdot (9-m) \cdot \binom{12-m}{4} = 458\,377.920.$$

UN POCO DE TODO

En los dos capítulos anteriores se ha tratado sobre el número de ciertas series de movimientos: por un lado el de las soluciones de un problema normal, o sea, de series "posteriores" a la posición presentada en el diagrama; y por otro, el de ciertas partidas demostrativas, es decir, de series de movimientos "anteriores" a la posición reflejada en el diagrama.

El presente capítulo ofrece problemas de naturaleza más heterogénea.

Diagrama núm. 71



En este ejemplo, cuyo autor es N. Petrovič [1], las blancas disponen de 218 movimientos. Se trata del número de series de movimientos que en él constan, sin embargo, de un sólo movimiento. ¿De cuántos movimientos dispone a lo sumo un bando en una posición legal? Este diagrama es un conocido ejemplo de composición de problemas sobre este tema.

O. Riihimaa propone este problema inédito (diag. 72):

¿Cuántas series de movimientos diferentes hay cuando las blan-

[1] "Fairy Chess Review" (junio de 1946).

cas mueven y, después de haber transcurrido 50 movimientos, exigen las tablas conforme a la regla que lo determina? Este problema trata sobre los largos recorridos de las piezas, que hemos visto anteriormente; en él, los dos bandos se limitan a mover su torre, con el fin de apurar la regla citada y, por eso, tienen $(14 \cdot 9)^{50} = 126^{50} \approx 1{,}04 \cdot 10^{105}$ posibilidades de moverla.

Diagrama núm. 72

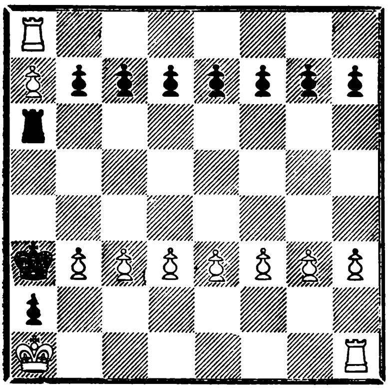
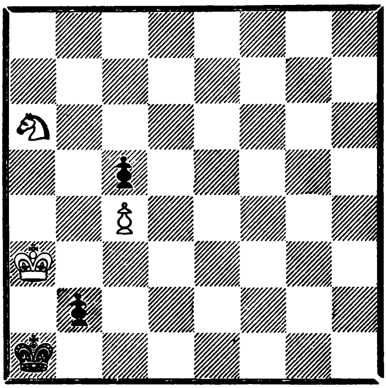


Diagrama núm. 73



El doctor Erkki Pesonen contribuye con este problema inédito, en el cual se confrontan dos formas del "juego fortuito al ajedrez"; en ellas, cada bando efectúa los movimientos más probables. Por consiguiente, ¿cuál será el resultado final de la partida más probable en la que las blancas empiezan el juego, si en la posición todos los movimientos legales tienen la misma probabilidad de suceder y si en cada posición la pieza que se ha de mover se determina de modo que todas las piezas de color igual tengan iguales probabilidades, tras lo cual el movimiento de la pieza elegida se fija según el caso? (diag. 73).

Cuanto más extensa es la serie de movimientos, más reducida debe ser, por lo general, su probabilidad. Esta circunstancia motiva que se tenga en cuenta sólo la pronta realización del mate.

Soluciones:

Primer caso, **1. C4C, P8C=T; 2. C2A** mate, con la probabilidad de $1/6 \cdot 1/6 \cdot 1/7 = 1/252$.

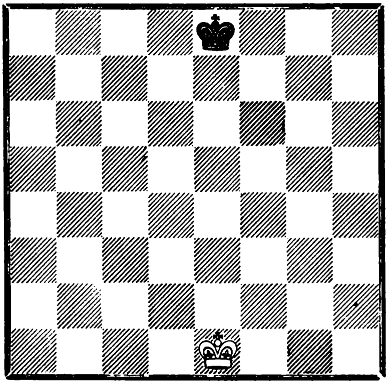
Segundo caso, **1. C×P, P8C=A; 2. C3C** mate, con la probabilidad de $1/8 \cdot 1/8 \cdot 1/6 = 1/1.024$.

Variaciones temáticas: primer caso, **1. C×P, P8C=A; 2. C3C** mate, con la probabilidad de $1/6 \cdot 1/5 \cdot 1/11 = 1/330$; segundo caso, **1. C4C, P8C = T; 2. C2A** mate, con la probabilidad de 1/8 · · 1/12 · 1/12 = 1/1.152.

Si los ejemplos que acabamos de ver tienen cierto carácter dinámico, los que a continuación se ofrecen lo tienen más bien estático. En ellos hay que calcular cantidades de posiciones o de combinaciones de material, en lo que estas cuestiones pueden igualmente referirse a situaciones "posteriores" o "anteriores" a la posición reflejada en su diagrama correspondiente. Además, se tiene una tercera posibilidad: la condición de hallar el número de posiciones diferentes puede asimismo referirse a la propia posición del diagrama, pues hay posiciones que exteriormente son iguales, aunque se diferencian en las posibilidades de efectuar los movimientos.

H. Klüver aporta esta composición [2]: ¿Cuántas posiciones dife-

Diagrama núm. 74



rentes pueden formarse después de que cada bando haya realizado un movimiento?

En la solución de este problema conviene advertir que, según la costumbre establecida por los autores de problemas, el enroque es admisible, no sólo cuando el rey y la torre se hallan en sus respectivas casillas de origen y no se pueda rebatir con el análisis retroactivo que ambas piezas aún no se han movido de su lugar, sino también cuando el rey está en su propia casilla y tampoco se puede rebatir con el análisis antedicho que el bando en cuestión ha movido el rey o la torre, cuya "sombra" permanece todavía

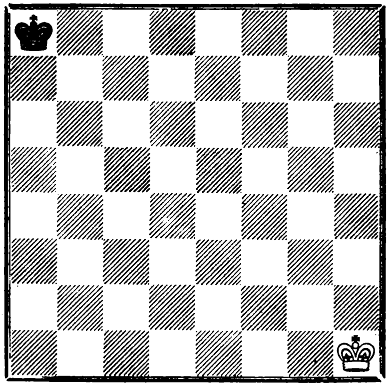
---

[2] "Chess Amateur" (noviembre de 1923).

en una esquina del tablero. De lo contrario, se obtendrían solamente $5^2 = 25$ posiciones diferentes. Pero si se consideran los dos enroques, el corto y el largo, cada bando tendrá 7 posibilidades de mover; mas como uno de los dos reyes ha tenido que ser el último en hacerlo, los dos bandos no pueden enrocar y, por lo mismo, se descontarán las posiciones que podrían formar los dos enroques. De consiguiente, se podrán formar $7^2 - 2^2 = 45$ posiciones diferentes.

K. Fabel propone este problema [3]: ¿Desde cuántas posiciones

Diagrama núm. 75



diferentes se puede formar la presente posición, si cada bando ejecuta un movimiento?

En el caso de que cada rey retroceda a la posición anterior al movimiento que ha efectuado, tomando una pieza adversaria o sin tomarla, se producirán $3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 5 = 225$ posiciones, a las cuales se les debe restar las $6 \cdot 6$ en que las dos piezas están en trance de jaque. Si uno de los reyes se ve forzado a desembarazarse de una pieza, trocándola por un peón, resultarán $2 \cdot (4 + 4 + 1) = 18$ posiciones. Pero si dicha pieza se traslada desde cierto escaque hacia el 1TR o el 8TD (de las blancas) y come allí una pieza blanca o negra, según el caso, se obtendrán $2 \cdot 5 \cdot$ (32 con la dama + 26 con la torre + 12 con el alfil + 6 con el caballo) = 760 posiciones. De consiguiente, la posición, de la cual es imagen el presente diagrama, se puede formar partiendo de $225 - 36 + 18 + 760 = 967$ posiciones.

[3] "Schwalbe" (marzo de 1960).

Juha Kasanen contribuye con esta composición [4]: ¿Cuántas posiciones inmediatas a la anterior se pueden formar? Hay que distinguir cuatro casos: la posición reflejada en el diagrama y la misma posición, pero con el peón 2D situado en la casilla 3D, con el 4R en la 3D y con el 2D en la 4D (diag. 76).

Diagrama núm. 76

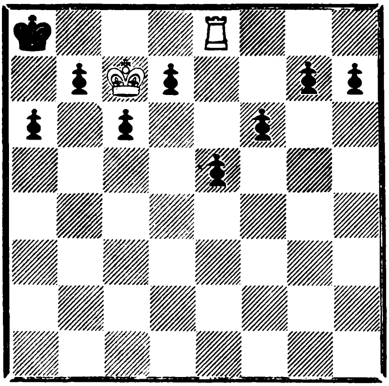
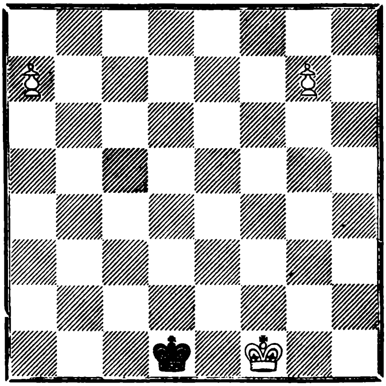


Diagrama núm. 77



1) Son posibles 30 posiciones, con la condición de que no se haya efectuado el movimiento R8AD×T2AD ni el P7AR×A1R=T. 2) Se producen 34 posiciones, pero sin que se pueda haber hecho P7AR×C1R=T. 3) Se forman 39 posiciones, mas sin haber precedido a ninguna de ellas los movimientos R8AD×T2AD, P7AR×A1R=T ni P7AR×C1R=T. Y 4) Aquí se obtienen 41 posiciones.

E. Bonsdorff plantea el siguiente problema [5]: ¿Cuántas combinaciones de material se pueden formar, si cada bando ejecuta dos movimientos? Las blancas juegan (diag. 77).

Con la eventual transformación de los dos peones en pieza mayor, puede aquí emplearse el concepto combinaciones con repetición y, de acuerdo con él, enunciar el problema que se presenta como sigue: ¿Cuántas combinaciones de clase 2 pueden formarse con los 5 elementos, pudiendo entrar un mismo elemento? Ya que, al final, otro peón puede desaparecer sin dejar rastro, me-

[4] Dedicada a la Suomen Tehtäväniekat, con motivo del trigésimo aniversario de su fundación, y publicada en "Ilta-Sanomat" (6 de febrero de 1965).

[5] "Ilta-Sanomat" (9 de febrero de 1960).

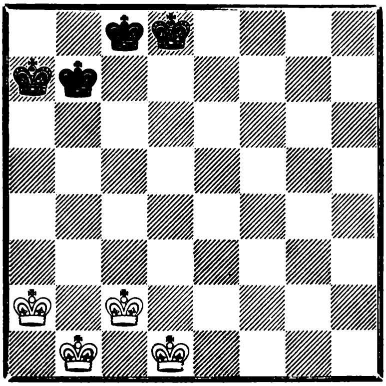
diante **1. P8CR=D, R7A; 2. D3C+, R×D** por ejemplo, el número de combinaciones será

$$\binom{5+2-1}{2}+1=16.$$

Este problema, de O. Riihimaa[6], presenta a la vez ocho condiciones (diag. 78):

¿Cuántas combinaciones de material se pueden formar si cada bando ha tomado en uno o en dos movimientos una pieza en cada una de las posiciones correspondientes a la columna TD, CD, AD y D, en el caso de que el bando negro sea el primero en tomar?

Diagrama núm. 78



Primer caso: según el material propuesto, hay 6 maneras diferentes de comer una pieza; por lo tanto, en la columna TD habrá $6^2=36$ posibilidades de hacerlo, pues en ella son factibles todas las combinaciones de material. En las demás columnas no ocurre lo mismo; veámoslo: en la CD se pueden formar $36-1=35$, porque al lado de los dos reyes no puede haber un peón aislado en el tablero; en la AD se producen $36-2=34$, por cuanto un peón negro no puede aparecer junto con la dama blanca ni con un peón de este color, y en la D se obtienen $36-6=30$, por no ser realizables todas las combinaciones en que el bando negro tenga un peón.

Segundo caso: si un bando ha tomado una pieza en dos mo-

[6] "Ilta-Sanomat" (7 de septiembre de 1965).

vimientos, entonces el número de combinaciones de material del otro bando será

$$\binom{6+2-1}{2} = 21;$$

por lo tanto, se tendrá $21^2 = 441$ en la columna TD; 441 en la CD; $441 - 3 = 438$, porque al lado de dos peones negros no puede haber dos peones blancos, ni dos damas blancas, ni una dama y un peón de este color, y $441 - 7 = 434$ en la D, por cuanto son imposibles todos los casos en que el bando negro tenga dos peones, y el blanco tenga dos damas o un peón, por lo menos.

La siguiente parte de este capítulo trata sobre las "posiciones no idénticas".

En una partida de ajedrez normal, un jugador tiene derecho a reclamar las tablas cuando él o su oponente vayan a efectuar un movimiento con el cual la posición se repita por tercera vez. Anteriormente, hemos estimado que dos posiciones son iguales si en ellas piezas idénticas y de color igual están colocadas en escaques de un mismo color; pero, como se ha dicho, pueden ser totalmente distintas según se considere la admisibilidad o inadmisibilidad de las tomas de peón al paso y de los enroques. A este respecto, la F. I. D. E. modificó la regla sobredicha, en noviembre de 1964. Autores de problemas, como T. R. Dawson (1934), ya plantearon este asunto, y H. Klüver compuso un problema sobre él [7]; problema que se semeja a este que veremos seguidamente y que dio a la prensa un mes después [8] (diag. 79):

¿En cuántas situaciones diferentes puede ponernos una posición exteriormente invariada dentro de una misma partida, en que se aplique la regla de las tablas modificada? Y ¿cuántas veces puede presentarse una posición exteriormente invariada sin que dé derecho a reclamar las tablas en el transcurso de una partida, en la cual tenga validez la regla de las tablas modificada?

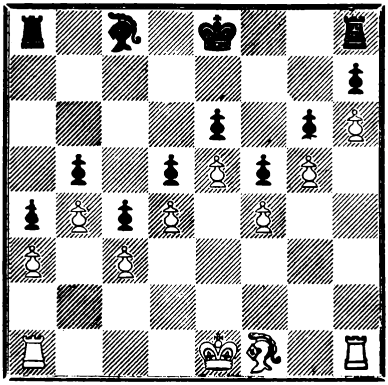
En el primer caso, y en la posición del diagrama, se ve fácilmente que se producen 11 situaciones: en la primera son posibles los 4 enroques y la captura P5R×P4D al paso; en la segunda y tercera se pierde el derecho a tomar al paso, ya por el movimiento de las blancas, ya por el de las negras; en la cuarta y quinta, una torre deja su posición inicial y vuelve a ella, bien

---

[7] "Fairy Chess Review" (diciembre de 1947).
[8] "Schachspiegel" (enero de 1948).

por el movimiento de las blancas, bien por el de las negras, de suerte que hay sólo 3 posibilidades de enrocar; en la sexta y séptima, tales posibilidades se reducen a 2; en la octava y novena se reducen a 1, y en la décima y undécima se ha perdido el derecho al enroque. Exceptuando la primera, cada situación diferente puede

Diagrama núm. 79



presentarse 2 veces al mover el bando blanco y otras 2 al hacerlo el negro, y con derecho a enrocar 4, 3, etc., veces antes de que se puedan reclamar las tablas. Por consiguiente, $1 + 10 \cdot 2 = 21$ cumple las condiciones del segundo caso. Y así, se podrá reclamar el empate si la posición se repite por vigésima-segunda vez.

El siguiente problema es un poco distinto del que acabamos de analizar:

Se debe a O. Riihimaa[9], y se enuncia como sigue:

¿Cuántas posiciones diferentes contiene la posición inicial de la partida si se prescinde de una de las siguientes piezas: 1) de la torre 1TD; 2) del caballo 1CD; 3) del alfil 1AD; 4) de la dama 1D, y 5) del alfil 1AR?

Solución: En las posiciones 1), 2) y 3) pueden mover primero así las blancas como las negras, y las posibilidades serán $2 \cdot 2 \cdot 4 =$ $= 16$ en la primera, $2 \cdot 4 \cdot 4 = 32$ en la segunda y $2 \cdot 4 \cdot 4 = 32$ en la tercera. La 4) es factible si mueven solamente las blancas, y se tienen $4 \cdot 4 = 16$ posibilidades. Y en la 5) hay $4 \cdot 4 = 16$ posibilidades si mueven las blancas, y $2 \cdot 4 = 8$ si lo hacen las negras, pues aquí la torre blanca 1TR ha perdido un tiempo y, por consiguiente, la oportunidad de enrocar corto.

[9] Con él obtuvo la mención honorífica en el citado XXXV torneo.

En total, se producen $16 + 8 = 24$ situaciones diferentes.

Si se prescinde de otras piezas, el problema resulta un poco más complicado. Veámoslo:

Matti Myllyniemi contribuye con este trabajo inédito:

¿Cuántas posiciones se podrán formar, teniendo en cuenta los diversos modos de efectuar los movimientos, si todas las piezas que forman cada una de ellas se hallan en su escaque de partida o han regresado a él?

Debido a las posibilidades que ofrecen los enroques, es conveniente considerar también los movimientos de las torres, pues cada una de ellas forma dos posiciones: una con el enroque y otra sin él. En los siguientes cuatro productos de los apartados a, b, c y d, el primer factor representa el número de posiciones de las blancas.

Mueve el bando blanco:

a) Faltan las torres: se tendrán, por tanto, 13 piezas blancas, y se habrá de decidir si colocarlas en el tablero o considerar que el adversario ya las ha tomado. Estas consideraciones también son válidas en el caso de las negras, que no disponen, aquí, de ningún último movimiento por faltarles las torres, los caballos y los peones 2TD y 2TR. La cantidad de estas posiciones es $2^2 = 4$, y la de todas las posiciones sin las torres es $2^{13} \cdot (2^{13} - 4)$.

b) Hay una torre negra: las blancas pueden tener dos torres o una o bien ninguna; por lo cual tienen $(4 + 2 \cdot 2 + 1) \cdot 2^{13} = 9 \cdot 2^{13}$ posiciones diferentes. Conforme a este cálculo, las negras habrían de tener $2 \cdot 2 \cdot 2^{13}$ posibilidades; pero hay aquí posiciones que entran dos veces en el cálculo, no obstante estar prohibido el enroque; de ahí que sus posibilidades reales sean $2 \cdot 424$ (2^8 posiciones formadas con el rey y una torre sin otras piezas; 2^6 con el alfil 1AD; 2^6 con el alfil 1AR; 2^4 con el alfil 1AD y con la dama 1D; 2^4 con el alfil 1AD y con el 1AR, y 2^3 con el alfil 1AD, con la dama 1D y con el alfil 1AR; en total, 424). De consiguiente, el número de posiciones de los dos bandos es $(9 \cdot 2^{13}) \cdot (4 \cdot 2^{13} - 2 \cdot 424)$.

c) Hay las dos torres negras: aquí, el bando negro puede encontrarse primero en $4 \cdot 2^{13}$ situaciones diferentes; pero en el cálculo de este producto han entrado cuatro veces algunas posiciones en que los dos enroques no pueden ser simultáneamente admisibles. La cantidad de tales posiciones es también 424 (véase el apartado b); por lo tanto, las posiciones factibles son $(9 \cdot 2^{13}) \cdot (4 \cdot 2^{13} - 424)$.

d) No hay ninguna torre negra: las blancas tienen una o dos

torres; por lo tanto, el número de posibilidades será $(8 \cdot 2^{13}) \cdot$
$\cdot (2^{13} - 4)$.

Mueve el bando negro:

En este caso, el número de posiciones diferentes es menor que la totalidad de ellas en los casos anteriores. Pues si se hacen las mismas consideraciones que en 4) y 5) del problema anterior, habrá que restar $4 \cdot 16 + 4 \cdot 8 + 4 \cdot 8 + 4 \cdot 4 = 144$ posiciones, en las que al bando negro no puede tocarle mover.

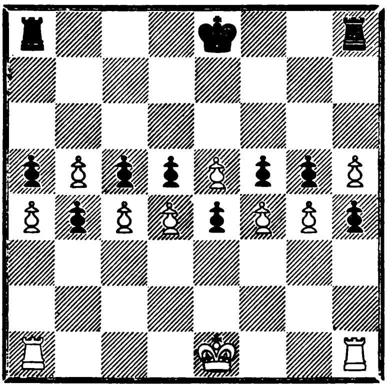
La solución definitiva es

$$2 \cdot [2^{13} \cdot (2^{13} - 4) + 9 \cdot 2^{13} \cdot (4 \cdot 2^{13} - 2 \cdot 424) + 9 \cdot 2^{13} \cdot$$
$$\cdot (4 \cdot 2^{13} - 424) + 8 \cdot 2^{13} \cdot (2^{13} - 4)] - 144 = 10.683\,481.968.$$

La cantidad de posiciones puramente geométricas (disposición de las piezas) es, por el contrario, $2^{30} - 16 = 1.073\,741.808$. (En las $2^4 = 16$ posiciones, ningún bando puede disponer de un último movimiento. Estas posiciones son aquellas en que faltan todas las torres, todos los caballos y los peones de las columnas extremas, por lo menos.)

O. Riihima [10] propone hallar las situaciones no idénticas y con diversas posibilidades de mover, contenidas en esta posición.

Diagrama núm. 80



Al igual que en algunos problemas anteriores, las posibilidades de enrocar son al principio $4 \cdot 4 = 16$. Si las blancas mueven, habrá que contar con 6 situaciones referentes a la captura al

---

[10] "British Chess Magazine" (noviembre de 1954).

paso, según que haya precedido P4TD, P4AD, P4D, P4AR, P4CR (de las negras) o cualquier otro movimiento de un peón inmediato a los referidos; esto les da $6 \cdot 4 \cdot 4 = 96$ posibilidades. Y, como las negras también pueden mover, la cantidad total de posibilidades será $2 \cdot 96 = 192$.

Se comprueba fácilmente la imposibilidad de formar otra posición de esta clase en que el número de situaciones sea más elevado.

K. Fabel presenta este problema [11]:

¿Cuál es el mayor número de posiciones geométricas diferentes en que falten los caballos y los alfiles, y todos los peones ocupen sus respectivos escaques de salida?

En la distribución de las 4 casillas desocupadas entre una torre, la dama, el rey y la otra torre, las blancas tienen

$$\binom{8}{4} = 70$$

posibilidades de hacerlo. Y las negras tienen otras tantas. En el caso de que se haya enrocado, hay otras 70 más. Por consiguiente, el número de tales posiciones buscado es

$$\left[2\binom{8}{4}\right]^2 = 19.600.$$

Suplemento: Entretanto, el autor del problema, propuesto en el diagrama 72, ha hallado el valor exacto del mismo y es como sigue:

1.043 583.624 915.992 322.004 987.038 165.379 072.
826 843.313 081.551 745.745 535.209 959.483 360.
465 524.619 027.077 751.788 441.620 709.376

¿Hay alguno que pueda comprobar este resultado?

---

[11] Presentado en el torneo de soluciones de problemas, organizado por la Suomen Tehtäväniekat (1968).

LAS PROBABILIDADES

Según los principios del cálculo de probabilidades clásico, la probabilidad de que se produzca un determinado fenómeno es igual al cociente que resulta de dividir el número total de casos favorables por la suma de todos los casos, favorables y desfavorables: $\frac{p}{q} = m$. Aquí supondremos que los casos favorables y desfavorables son "igualmente favorables". De acuerdo con este supuesto, se tratarán diversas cuestiones en este capítulo, y, donde el caso lo requiera, se añadirá expresamente que los *m* casos son "igualmente favorables", con lo cual se querrá decir que son "igualmente probables".

Pero hay problemas que no se pueden resolver por este procedimiento; por ejemplo: determinar la probabilidad de que un ajedrecista gane cierta partida; en este caso no se puede hablar de casos "igualmente favorables" o "igualmente probables". Por ello, en problemas así debemos usar los principios modernos del cálculo de probabilidades, donde la probabilidad "a priori" debe ser sustituida por la probabilidad "a posteriori"; quiere esto decir que en el cálculo de una probabilidad se deben considerar aquellos acontecimientos cuyo resultado ya es conocido. Por ejemplo: si A ha jugado muchas partidas con B, será necesario que los dos jueguen otra partida, para poder hacer un pronóstico al modo de una probabilidad "a posteriori" determinada, con los datos que se tienen y los que se obtengan.

C. H. O'D. Alexander ha indicado otra forma de determinar tal probabilidad. Se trata del método que el doctor E. T. O. Slater y él han usado para comparar los resultados reales de una considerable cantidad de partidas con los que se esperaban obtener (véase el capítulo "Las valoraciones"). Para fijar las ideas ilustraremos lo dicho:

Un torneo consta de 13 rondas y en él toman parte 14 ajedrecistas. Consideremos todas las partidas que A y B han jugado con los demás participantes.

A ha obtenido los siguientes resultados:

5 partidas ganadas
6 entabladas (en total 8 tantos)
1 partida perdida.

Por el contrario, B ha obtenido estos otros:

4 partidas ganadas
8 entabladas (en total 8 tantos)
0 partidas perdidas.

¿Qué probabilidad tienen ambos ajedrecistas?

El cálculo se hace así: primero se aumentará 1 unidad los números que representan las partidas ganadas, perdidas y empatadas de cada uno de los dos ajedrecistas en cuestión, para que no se produzca ninguna multiplicación por cero, pues el resultado sería cero, por supuesto. (Parece aconsejable también proceder según el cálculo de valores de Buchholz, en que las cantidades se igualan por medio de la multiplicación; a este respecto, véase otra vez el capítulo "Las valoraciones".) Y así tendremos:

A	6	partidas	ganadas
	7	"	tablas
	2	"	perdidas
B	5	partidas	ganadas
	9	"	tablas
	1	"	perdida.

Ahora, ya aumentado en 1 unidad, el número de partidas ganadas por A se multiplicará por el de las perdidas por B; luego, el de las que ha ganado éste por el de las que ha perdido aquél, y, finalmente, el de las tablas del primero por el de las del segundo. Tendremos:

$$\begin{array}{lr} \text{Ganancia de A} = 6 \cdot 1 = & 6 \\ \text{Tablas} \qquad\quad = 7 \cdot 9 = & 63 \\ \text{Ganancia de B} = 2 \cdot 5 = & \underline{10} \\ & 79. \end{array}$$

De esta cantidad se deducen los valores probables:

$$\begin{array}{l} \text{Una ganancia de A} = 6/79 = 0{,}07 \\ \text{Unas tablas} \qquad\quad = 63/79 = 0{,}80 \\ \text{Una ganancia de B} = 10/79 = 0{,}13. \end{array}$$

Aunque la suma de los tantos (sin tener en cuenta las partidas que A y B han jugado entre sí) es igual a 8, el cálculo muestra que B le lleva una ligera ventaja a A y, al contrario de éste, no ha perdido ninguna partida.

J. E. Littlewood[1] ha tenido el humor de calcular las probabilidades de que uno, cuyos conocimientos de ajedrez consisten únicamente en colocar una de sus piezas en una casilla que esté desocupada u ocupada por una pieza del contrario, le gane la partida al campeón del mundo. El valor, hallado "a priori", es $1 : 10^{122}$.

Es muy importante expresar clara y exactamente las condiciones de los problemas en que interviene el cálculo de probabilidades, pues de ello depende hallar la verdadera solución de los mismos. Lo cual se puede comprobar en las posiciones que se forman en el tablero de ajedrez. Veamos un ejemplo:

Colocado en la casilla 1TD (de las blancas), un rey se mueve dos veces. ¿Cuál es la probabilidad de que vuelva a ocupar dicha casilla al segundo movimiento?

1.ª solución.—Desde el escaque 1TD son posibles e igualmente probables 18 series de dos movimientos ($q = 18$); por ejemplo: 1TD-2TD-3TD, 1TD-2CD-1TD o 1TD-1CD-2CD; 3 de ellas son favorables ($p = 3$); a saber: 1TD-2TD-1TD, 1TD-1CD-1TD y 1TD-2CD-1TD. En consecuencia, resulta $m = p : q = 3 : 18 = 1/6$.

2.ª solución.—Desde 1TD son imposibles 3 movimientos diferentes e igualmente probables. En cada uno de estos movimientos m vale 1/3. Desde 2TD y desde 1CD son respectivamente posibles 5 movimientos diferentes y probables, y desde 2CD son posibles 8; por lo tanto, m valdrá 1/5, 1/5 y 1/8 en cada uno de estos movimientos. Multiplicando la m del primer movimiento por la m del segundo y sumando los tres productos obtenidos resultará $m = 1/3 \cdot 1/5 + 1/3 \cdot 1/5 + 1/3 \cdot 1/8 = 7/40$, valor un poco más elevado que el obtenido en la primera solución.

No se puede determinar qué solución es la verdadera; pero sí decir que el enunciado del problema es incompleto. Pues falta especificar si las series de movimientos deben considerarse como un conjunto y si todas ellas son probables (primera solución), o si cada movimiento se debe considerar separadamente y si todos ellos deben ser igualmente probables (segunda solución). Un mal entendido por el estilo se produjo en dos problemas que E. Bonsdorff presentó en el susodicho XXXV torneo, cuyo juez de competición fue K. Fabel.

El más interesante de estos dos problemas reza así: Partiendo de la posición inicial, se harán movimientos fortuitos. ¿Cuál es la cantidad de posiciones más probables y menos probables, después de que las negras hayan efectuado su segundo movimiento?

---

[1] Véase *A Mathematician's Miscellany.*

En la solución, su autor (véase el capítulo "El juego de ajedrez fortuito") considera separadamente cada movimiento e igualmente probable. En la posición inicial de la partida, m es igual a 1/20 para cada caballo blanco. Después de **1. C3TD** y **1. C3TR,** m vuelve a ser igual a 1/20, pues el caballo se retira a su casilla de salida. Y después de **1. C3AD** y **1. C3AR,** m es igual a 1/22, porque el caballo tiene más casillas adonde poder saltar. Estas consideraciones son igualmente válidas en el caso de las negras. Tras haber efectuado cada bando 2 movimientos, se vuelve a la posición inicial, y m llega a valer.

$$[2/20\ (1/20 - 1/22)]^2 \approx 9{,}1 \cdot 10^{-5}.$$

La posición más probable es la inicial, pues los valores de m son más pequeños en otras series de movimientos, particularmente en la **1. P4R, P4D; 2. A4A,** y las negras pueden proseguir con un movimiento del rey, de la dama, del alfil, del peón 2D-4D o del caballo 1CD-2D.

En su segundo movimiento, las negras pueden elegir uno entre 30 movimientos; por lo que en cada uno m valdrá 1/30. Si bien 18 de estos movimientos forman posiciones, que pueden formarse igualmente por transposición de los dos movimientos de las negras, mientras los 11 que se pueden efectuar con el rey, la dama, el alfil 1AD, el peón 2D-4D o el caballo 1CD-2D originan posiciones que se pueden formar sólo con dos movimientos. En estas 12 posiciones, el valor de m es

$$1/20 \cdot 1/20 \cdot 1/31 \cdot 1/30 \approx 2{,}7 \cdot 10^{-6}.$$

El juez árbitro de la competición fue del parecer, acaso erróneo, de que la expresión "se harán movimientos fortuitos" no significa por entero que cada movimiento se considere por separado e igualmente probable. Por ello, en su informe de la competición logró, en parte, hallar otra solución, en la cual consideró cada serie de movimientos como un complejo y todas ellas igualmente probables:

"En total hay unas 197.300 series en que se pueden ejecutar los dos primeros movimientos de cada bando, lo que produce 71.852 posiciones diferentes, de las cuales una, la inicial, puede formarse de 16 maneras (cada caballo se muda de su casilla de salida a otra y vuelve a ella). Y así, la probabilidad de que se forme es

$$\frac{16}{193.300}.$$

Los valores de las demás probabilidades son bastante inferiores a éste; oscilan entre la mitad y 1/16 de él."

Es digno de nota que K. Fabel también lograse teóricamente deducir que la posición inicial de la partida es la más probable y que su valor es $m = 8 \cdot 10^{-5}$.

El problema propuesto en el diagrama 73 es, sin duda, un buen ejemplo para definir con precisión el momento de efectuar los movimientos más probables.

El enunciado de los simples problemas de coordinaciones casi no presenta dificultades. Veamos uno:

En un tablero cuadrado se colocan una pieza blanca (la dama, una torre, un alfil o un caballo) y el rey negro. ¿Qué valor tiene la probabilidad m de que se dé jaque al rey?

Se dispone de n^2 casillas para la pieza blanca y de $n^2 - 1$ para el rey negro, y es igualmente probable que éste se coloque en cualquiera de ellas. El número de todas las coordinaciones posibles (q) es igual a $n^2 (n^2 - 1)$ y el de las coordinaciones en que se da jaque al rey (p) se deduce del número de casillas que domina la pieza blanca, según el caso. El cual podemos tomarlo del capítulo "La movilidad de las piezas de ajedrez", donde se habla de las fórmulas que representan el mayor número posible de movimientos. Si dividimos p por q tendremos los siguientes valores de m en el tablero de 8 casillas de lado:

$$M(\text{D}) = \frac{2\ (5n - 1)}{3n\ (n + 1)} = 13/36$$

$$M(\text{T}) = \frac{2}{n + 1} = 2/9$$

$$M(\text{A}) = \frac{2\ (2n - 1)}{3n\ (n + 1)} = 5/36$$

$$M(\text{C}) = \frac{8\ (n - 2)}{n^2\ (n + 1)} = 1/12.$$

Todo aquel que esté de humor puede entretenerse en calcular el valor de m en el caso de "jaque seguro", o sea, en el de una coordinación en que se da jaque al rey negro, y éste no puede tomar la pieza que se lo da. Desde luego, esta condición es igualmente válida si la pieza blanca es un caballo.

También interesan los problemas en que se propone hallar el valor de m cuando el rey negro y dos torres blancas están en el tablero y le dan jaque, en lo cual todas las coordinaciones deben ser igualmente probables. En este caso, q es igual a $1/2\ n^2 \cdot (n^2 - 1) \cdot (n^2 - 2)$, mientras p lo es a $n^2 (n - 1) \cdot (2n^2 - 2n - 1)$. De consiguiente

$$\frac{P}{Q} = M(2T) = \frac{2\ (n^2 - 2n - 1)}{(n + 1)\ (n^2 - 2)} = 37/93$$

en el caso de $n = 8$.

Los dos capítulos que tratan sobre las coordinaciones de piezas idénticas y piezas diferentes pueden servir para componer problemas de esta clase:

Se coloca cierto número de piezas idénticas o diferentes en el tablero. ¿Qué valor tendrá m si cada una de ellas no abarca la casilla de las otras? Con todo, son más interesantes los problemas referentes al movimiento de las piezas y que proponemos seguidamente:

M. Charosh contribuye con este problema[2]:

Colocadas respectivamente en los escaques (0/0) y (n/n), dos torres se ponen en movimiento a un mismo tiempo y a igual velocidad; cada una se dirige hacia el punto de partida de la otra, y lo hace por el camino más corto, el cual se determinará sobre la marcha. ¿Qué probabilidad hay de que ambas piezas se encuentren?

Para fijar las ideas, designemos por 1TD (blancas) el punto (0/0) y por 1TR (negras) el (n/n). Y así, n será igual a 7. Cada torre se mueve por su derecha y hacia arriba. Como la velocidad de las dos es igual, se pueden encontrar sólo en las casillas de la diagonal 8TD-1TR, es decir, en aquellas casillas cuyas coordenadas sean $(0/n)$, $(1/n - 1)$, $(2/n - 2)$ ... $(n/0)$.

El número de los recorridos más cortos, desde (0/0) hasta cualquier casilla (a/b), lo podremos representar por la conocida fórmula de la teoría de las combinaciones

$$\frac{(a + b)!}{a!\ b!} \text{ o, lo que es igual, } \binom{a + b}{a}.$$

En el caso de $a = b = n$ se tendrá el siguiente valor

$$\frac{(2n)!}{n!\ n!}, \text{ o } \binom{2n}{n}.$$

[2] "Fairy Chess Review" (junio de 1952).

Para determinar la probabilidad del encuentro dividiremos el número de todos los casos favorables por la suma de todos los casos, favorables y desfavorables. El número de los casos favorables se compone de los puntos de encuentro mencionados $(0/n)$, $(1/n)$, $(1/n-1)$ $(2/n-2)$, y así sucesivamente. Como se ha dicho, una torre tiene $\binom{a+b}{a}$ posibilidades de trasladarse del escaque $(0/0)$ al (a/b) y tendrá las mismas para hacerlo de (a/b) a (n/n), o sea $(a+b=n)$. Por lo tanto, para ir de $(0/0)$ hacia (n/n) a través de (a/b) tendrá

$$\binom{a+b}{a}^2$$

posibilidades. Si multiplicamos esta cantidad por la de los posibles recorridos de la otra torre, obtendremos.

$$\binom{a+b}{a}^4.$$

En esta expresión se debe sustituir $a+b$ por n, según el caso, mientras el valor de a variará de **0** a n.

Se ha dicho que $\binom{2n}{n}$ es el número total de los recorridos posibles de una torre y que la otra torre dispone de otros tantos recorridos. Entonces, el número de casos posibles en nuestro problema será $\binom{2n}{n}^2$, y la probabilidad buscada estará representada por la fracción

$$\frac{\binom{n}{0}^4+\binom{n}{1}^4+\binom{n}{2}^4+\ldots\ldots\binom{n}{n-1}^4+\binom{n}{n}^4}{\binom{2n}{n}^2}$$

Aquí, los aficionados al cálculo matemático pueden sustituir la n por la cifra 7 y resolver el problema del número total de recorridos que hay para ir de la casilla 1TD (de las blancas) hacia la 8TR.

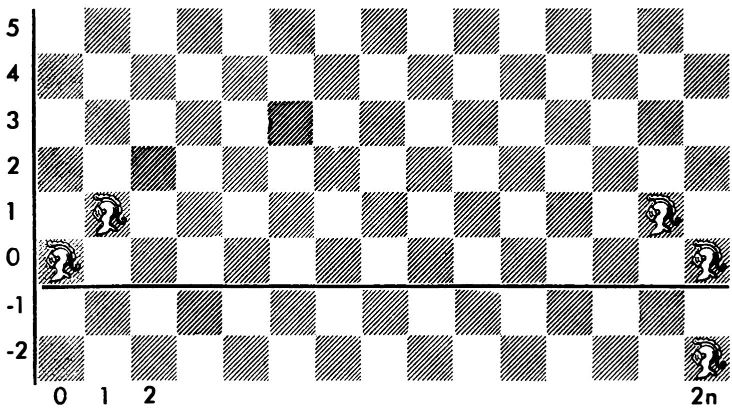
C. Bandelow contribuye con el siguiente problema, que se publica por primera vez aquí y trata sobre el recorrido de un alfil.

Un alfil se mueve en cortos recorridos desde la casilla inferior (0/0) de la izquierda del tablero hacia la inferior ($2n$/0) de la derecha del mismo, en que todos los recorridos cortos son igualmente probables. ¿Qué probabilidad hay de que el alfil en su recorrido no pase por ninguna casilla de la horizontal inferior, fuera de las (0/0) y ($2n$/0)?

Este problema se puede solucionar por el procedimiento seguido en la solución del de los recorridos del alfil y, sobre todo, de los del rey en el capítulo "Los recorridos de las piezas de ajedrez".

Al objeto de simplificar el problema, designaremos por y cada movimiento del alfil hacia arriba y por x cada uno de los que efectúe hacia abajo; de esta manera, la expresión $(x + y)^{2n}$ representará un recorrido de $2n$ movimientos de izquierda a derecha por un tablero ilimitado (diag. 81).

Diagrama núm. 81



Ya que al punto ($2n$/0) se puede llegar en n recorridos de clase y y en n de clase x, el coeficiente $x^n y^n$ de la expresión del paréntesis desarrollado corresponderá al número de todos los recorridos desde (0/0) hasta ($2n$/0). Este coeficiente binómico es igual a $\binom{2n}{n}$

Por otra parte, debemos tener en cuenta que el borde del tablero reduce considerablemente la cantidad de recorridos. Para sortear este obstáculo, tendremos que volver a servirnos de un nuevo artificio; esto es: hacer simétrica la casilla ($2n$/0) con referencia al eje de la horizontal — 1 del borde del tablero que no se deberá rebasar; de ese modo, las coordenadas de dicha casilla, ya simetrizada, serán $2n$ y — 2 (véase el diag. 81). Ahora, podremos determinar el número de todos los recorridos de $2n$ movimientos desde la casilla (0/0) hasta la ($2n$/—2); para llegar a esta última serán necesarios $n - 1$ recorridos de clase y y $n + 1$ de clase x. Por lo tanto, hay que determinar el coeficiente binómico del término $x^{n+1}\, y^{n-1}$ de la expresión $(x + y)^{2n}$. Dicho coeficiente es $\binom{2n}{n+1}$. Y así, el número de todos los $2n$ recorridos de (0/0) a ($2n$/0) será

$$q = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \frac{(2n)!}{n!\,(n+1)!}.$$

Ahora hay que determinar el número de todos los recorridos desde (0/0) hasta ($2n$/0), en los cuales no se podrá rebasar ningún escaque de la horizonal 0. Estos recorridos son, por lo tanto, todos los ($2n$ — 2) efectuados desde la casilla (1/1) hasta la ($2n$ — 1/1), en que ahora la horizontal 0 es el borde del tablero. De un modo análogo a como se ha hecho anteriormente, la fórmula que nos da el número de estos recorridos es

$$p = \binom{2n-2}{n-1} - \binom{2n-2}{n} = \frac{(2n-2)!}{(n-1)!\, n!}.$$

Y así, la igualdad $m = p : q$ buscada es

$$\frac{(2n-2)!\; n!\; (n+1)!}{(n-1)!\; n!\; (2n)!} = \frac{n+1}{4n-2}.$$

Este resultado es sorprendentemente sencillo; en él, n tiende a infinito y m a 1/4.

El procedimiento que el autor de este problema ha seguido en la solución del mismo se apoya igualmente en el principio de simetrizar los tramos que rebasan el borde del tablero con referencia al eje de la horizontal — 1.

El cálculo de probabilidades ofrece inmensas posibilidades de componer problemas solubles dentro de los límites del tablero y fuera de ellos.

Los que proponemos seguidamente son de distinta clase que los propuestos hasta aquí.

Dieciséis piezas blancas y dieciséis negras están colocadas desordenadamente en un cajón. Un niño, que no alcanza a ver el interior del mismo, mete la mano en él y saca dos piezas. Se pregunta:

a) ¿Es la probabilidad de sacar dos piezas de color distinto mayor o menor que un 50%?

b) ¿Es la probabilidad de sacar una pieza blanca mayor o menor que un 75 %?

Soluciones:

a) Supongamos que primero se saca una pieza blanca; quedarán quince piezas blancas y dieciséis negras en el cajón. La probabilidad de que la segunda sea negra es 16/31, o el 51 %. Si se saca primero una pieza negra, el tanto por ciento de que la segunda sea blanca es el mismo.

b) Como la probabilidad de sacar dos piezas de color distinto es el 51,6 %, la de sacar dos de un mismo color será el 48,4 %; y la mitad, es decir, el 24,2 %, la de sacar una pieza blanca. Por lo tanto, la probabilidad de que una de las dos piezas sea blanca es 51,6 % + 24,2 % = 75,8 %.

Estos dos problemas tienen bien poco que ver con el ajedrez, pues en ellos se pueden sustituir el cajón y las piezas por las bolas y las urnas, que gozan de buen predicamento entre los problemas referentes a la teoría de las combinaciones y del cálculo de probabilidades.

Los dos siguientes son distintos [3]; tratan sobre posiciones que concuerdan con la norma del juego y, por ello, es necesario conocer lo dicho acerca de las coordinaciones de 3 piezas en el capítulo "Coordinaciones de piezas diversas".

Dicho niño coloca ambas piezas en 2 casillas de un tablero normal. Se pregunta:

¿Qué probabilidades hay de formarse una posición ajustada a la norma del juego?

El número de posiciones ajustadas a dicha norma corresponde al de las posiciones legales de dos reyes (3.612). Del sobredicho cajón se pueden sacar a lo sumo $1/2 \cdot 32 \cdot 31$ pares de piezas diferentes; en este caso, las piezas idénticas, dos peones blancos por ejemplo, también se considerarán diferentes. Cada par de ellas se puede colocar de $64 \cdot 63$ maneras distintas en el tablero. Y así, la probabilidad de que el niño antedicho forme la posición pedida será

$$\frac{3.612 \cdot 100}{16 \cdot 31 \cdot 64 \cdot 63} \approx 0{,}18\ \%.$$

[3] K. Fabel los publicó en la revista yugoslava "Problem" (marzo de 1952).

En este otro problema, las posiciones de referencia habrán de estar formadas por dos reyes y otra pieza; pieza que puede ser una de las dos damas (223.944 coordinaciones), una de las cuatro torres (223.938), uno de los cuatro alfiles (223.220), uno de los cuatro caballos (223.944) y uno de los dieciséis peones (167.248).

Así que del cajón se podrán sacar $1/6 \cdot 32 \cdot 31 \cdot 30$ grupos diferentes de a tres piezas y colocarlos de $64 \cdot 63 \cdot 62$ maneras distintas en el tablero; aquí todas las piezas se considerarán igualmente distintas y la probabilidad de que el niño forme una posición correspondiente a la norma de juego es

$$\frac{6 \cdot 223.944 + 4 \cdot 223.938 + 4 \cdot 223.220 + 16 \cdot 167.248}{1/6 \cdot 32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 64 \cdot 63 \cdot 62 \cdot 0{,}01} \approx 0{,}47\ \%.$$

Hay muchos problemas de esta clase. Veamos otros dos:

Un cajón contiene piezas de ajedrez blancas y negras. Un niño, el cual no alcanza a ver el interior del mismo, saca de él 6 piezas blancas. Su padre es una persona aficionada a las matemáticas, y determina que la probabilidad de que las seis piezas sean blancas es un 50 %.

Averígüese cuántas piezas de un color y de otro hay en el cajón.

Este problema tiene dos soluciones: hay 11 blancas y 1 negra o 19 blancas y 2 negras. La probabilidad de elegir k piezas entre n piezas es, como se sabe $\binom{n}{k}$. De consiguiente, se tendrá

$$\frac{\binom{11}{6}}{\binom{12}{6}} = \frac{\binom{19}{6}}{\binom{21}{6}} = 1/2 = 50\ \%.$$

Este problema se debe a N. Petrović[4]:

Un cajón contiene mezcladamente 16 piezas blancas y 16 negras. Un niño saca una cantidad par de ellas. ¿Qué probabilidad hay de que esta cantidad par contenga tantas piezas blancas como negras?

[4] "Problem" (diciembre de 1952).

Veamos:

$$M = p : q = \frac{\binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \binom{n}{3}^2 \ldots + \binom{n}{n-1}^2 + \binom{n}{n}^2}{\binom{2n}{2} + \binom{2n}{4} + \binom{2n}{6} \ldots + \binom{2n}{2n-2} + \binom{2n}{2n}}$$

Haciendo, en esta igualdad, $n = 16$, el denominador de la fracción nos dará $q = 2^{2n-1} - 1 = 2^{31} - 1$, y la solución buscada será $\approx 0{,}28$ ó el 28 %.

LAS VALORACIONES

Se estima que las valoraciones son el método idóneo para calcular el tanteo en todas las ramas de la actividad ajedrecista; por ejemplo: para pronosticar el resultado de un torneo, para examinar una apertura y para adjudicar los premios en una competición de problemas de ajedrez.

Pero valorar el rendimiento de cada uno de los participantes en un torneo es un problema matemático difícil de resolver. Con razón se ha dicho que la suma de los tantos y medios tantos obtenidos no es la medida justa que determine el rendimiento total. ¿Por qué una victoria de un jugador situado en los últimos puestos de la clasificación no debe valorarse más que una de aquel que la encabeza?

Lo justo sería considerar igualmente la calidad de juego de los autores de una partida en un momento dado y exponerla en la tabla de la clasificación.

Se han propuesto diversos procedimientos de cálculo que podrían ser de utilidad cuando varios jugadores tienen igual número de tantos y ocupan el primer puesto de la clasificación; sobre todo, en los torneos organizados según el sistema suizo en que varios jugadores suelen estar igualados a tantos, debido al reducido número de rondas de que constan. Pues, a veces, ocurre que ocho participantes tienen la misma cantidad de tantos y, por lo mismo, se hallan distribuidos entre los puestos segundo y noveno de la clasificación.

Los procedimientos más conocidos se deben a Sonneborn-Berger, a Gelbfuss y a Buchholz [1]. No vamos a pormenorizarlos; nos limitaremos a señalar que en ellos el tanteo de dos jugadores se combina por adición o por multiplicación.

A este respecto es interesante la modificación que la Federación Alemana de Ajedrez ha introducido en el artículo 16 del reglamento de las competiciones. Según ella, los cinco mejor clasificados son elegidos candidatos a participar en una siguiente

[1] W. Pflughaup hizo una reseña de unos datos matemáticos de este autor en la revista "Problem" (diciembre de 1952).

competición especial. Si en ella se produce un tanteo igualado, se declara vencedor aquel que ha conseguido más tantos enteros o, por mejor decir, ha hecho menos tablas; de lo contrario, se aplica el simple procedimiento de Buchholz. ¡Dicho de otro modo, un tanto tiene más valor que dos medios tantos!

El doctor Slater ha investigado los valores de las aperturas [2], y en este aspecto también ha trabajado con O'D. Alexander [3].

En su trabajo de investigación, Slater revisa cada primer par de movimientos en las 5.663 partidas jugadas en las competiciones más importantes que se celebraron desde 1914 hasta 1952. Por este procedimiento halla los siguientes cocientes:

$$q = \frac{\text{Part. ganadas con las blancas} - \text{Part. ganadas con las negras}}{\text{Número de partidas}}$$

En las partidas analizadas, las blancas obtuvieron 1.935 victorias, y las negras ganaron 1.458 e hicieron 2.270 tablas. De esto se deduce el cociente $q = (1.935 - 1.458) : 5.663 = +\ 0{,}084$. Si las blancas hacen **1. P4R,** se tendrá $q = +\ 0{,}044$; en cambio, **1. P4D** da $q = +\ 0{,}100$. Y después de **1.** ..., **P4D,** da $q = +\ 0{,}136$.

En el trabajo posterior de Slater y Alexander, se valoran las 4.521 partidas jugadas en los torneos más importantes que tuvieron lugar entre los años 1914 y 1953. Lo realizan confrontando los resultados obtenidos con los "esperados" o probables. (Para hallar el valor de los resultados esperados, usan el procedimiento de cálculo que se ha seguido en el capítulo "Las probabilidades" del presente libro.) En ello, los citados autores parten del principio de que la tendencia de algunos ajedrecistas fuertes a defenderse ante un contrincante débil desfigura el cuadro puramente estadístico de los valores de las aperturas.

En 436 partidas de la defensa siciliana se obtuvieron los siguientes resultados: las blancas ganaron 130, se produjeron 157 empates y las negras ganaron 149. Así que éstas lograron 19 victorias más que aquéllas. Este resultado podría inducir a creer que la defensa siciliana es más favorable a las negras. Pero si se hubiese de considerar la calidad de los participantes, los resultados esperados serían estos: las blancas y las negras habrían ganado 107 y 152 partidas, respectivamente, y se habrían producido 177 empates, con el resultado de 45 partidas a favor de las negras. Por lo tanto, las blancas consiguieron 26 tantos más de lo

[2] "B.B.C.A. Magazine" (octubre de 1952).
[3] "British Chess Magazine" (junio de 1955).

esperado en las 436 partidas; esto representa un 6 %, y significa que las blancas obtienen en la defensa siciliana, realizada entre jugadores iguales, el 55 % de los tantos y las negras el 45 %.

En la totalidad de las partidas analizadas por este procedimiento, y teniendo en cuenta la capacidad de juego de los participantes, las blancas obtuvieron el 55 % de los tantos y las negras el 45 %; aquí, la apertura **1. P4D** fue también un poco más ventajosa que la **1. P4R.**

A veces, se valoran también los tantos obtenidos en las competiciones de problemas de ajedrez. Si la competición está arbitrada por un solo juez, experto y diligente, cabe esperar que las decisiones sean objetivas, aunque dictadas hasta cierto punto por el gusto personal. Pero la cosa cambia cuando hay varios árbitros, es decir, cuando los participantes han de resolver a la vez varios problemas publicados en una revista de ajedrez. En este sistema, llamado acertadamente "totalizador de solucionadores de problemas", hay problemas llamativos que influyen a quienes han de solucionarlos y, por eso, se aventajan a los problemas cuyo contenido es más teórico y seco; con todo, puede decirse que los problemas "mejores" se imponen a los "peores".

Desde el punto de vista matemático, en estos "totalizadores" hay que tener en cuenta lo siguiente: si a los participantes se les pide que den la puntuación a 10 problemas en el límite del 1 al 10, sin que ninguna de estas cifras entre dos veces en un mismo problema, entonces la suma de los puntos corresponderá al lugar debido. Pero si se les deja que distribuyan al árbitro las puntuaciones, entonces tal distribución no guardará ninguna relación con la realidad.

No faltan participantes magnánimos, cuyas puntuaciones suben a las nubes; por el contrario, los más rigurosos las conceden mucho menos elevadas. En tales casos, sería aconsejable igualar esta diferencia, buscando el valor medio de todas las puntuaciones que se conceden.

Otra de las complicaciones se debe a que algunos autores no valoran determinados problemas, particularmente si son suyos. Aquí, no es suficiente corregir todas las puntuaciones que dan a un problema determinado, hay que dividirlas por el número de aquellos que lo han valorado.

Por último, en la valoración de los problemas presentados en un torneo puede suceder que no arbitren algunos de los participantes entendidos en la materia, sino que lo hagan un equipo compuesto de dos o tres expertos. En este caso, no parece oportuno sumar solamente las puntuaciones dadas por algunos jueces, con el fin de obtener una serie de valores de los problemas presentados, pues se debe tener en cuenta que, al ser analizados por diversos jueces árbitro, están sujetos a la corriente de ciertos gustos personales, lo cual va en detrimento de ciertas valoraciones; por ello, convendría que los expertos revisasen un poco las puntuaciones discordantes que dan sus colegas; pero esto suscitaría discusiones, aun haciéndolo con gusto y benevolencia.

En cambio, es desestimable un método de cálculo propuesto por G. Martín y ensayado en un torneo brasileño (1955-1956). Dicho método consiste en sumar primero las puntuaciones dadas por tres jueces de la competición; luego, esta suma se divide por 3 y, después, al cociente se le suman las puntuaciones de los dos jueces que han calificado más favorablemente un problema. En lo matemático, este método significa que las puntuaciones de dos jueces se cuadruplican. Veámoslo: si designamos por a, b y c las puntuaciones de los tres jueces en cuestión y por a y b las dos más favorables, así lo calcula Martín, tendremos: $1/3\ (a + b + c) + a + b$. Lo cual corresponde a esta otra expresión $1/3\ (4a + 4b + c)$. Este método no se puede considerar apto para este fin, debido a la excesiva valoración que dan dos componentes del jurado.

También se ha intentado valorar de un modo objetivo los problemas de ajedrez, prescindiendo del gusto personal de los jueces y de los elementos estéticos.

El mejor de ellos, denominado MOE, se debe al norteamericano V. Wilson, quien asegura que la exactitud de su procedimiento alcanza el 95 %. Su autor investiga la acción de cada movimiento (los movimientos principales, las amenazas, la defensa, el peligro de mate, las desviaciones y las partes del juego) y le da un valor: la ganancia de material, el jaque y la entrega de material = 2; las obstrucciones y desobstrucciones = 3; la ocupación o abandono de una línea = 5; la apertura o el cierre de una línea = 7; la clavada o desclavada = 8, y así sucesivamente. Teniendo en cuenta ciertas directrices y rectificaciones de valores, obtiene por adición un valor definitivo para el número de piezas; valor que asciende a 100 puntos, por lo menos.

Apéndice: En dos interesantes escritos, N. Waldstein ha tratado sobre la valoración de los resultados de las partidas en las competiciones y la característica de la calidad del juego. Pero sorprende un poco cuando intenta demostrar que el sistema Buchholz no es válido para valorar las partidas en competiciones que constan de varias rondas, salvo las de los torneos organizados según el sistema suizo. Sin embargo, su sistema también adolece de lagunas en cuanto a la suma de los tantos obtenidos y en el orden de valorarlos.

EPILOGO

En esta obra se han tratado varios asuntos, cuya selección se debe al gusto de cada uno de sus autores. Ha habido que pasar por alto muchas cosas; pero esto no podía hacerse con el problema de ajedrez más antiguo.

Según una conocida leyenda, el primer problema de ajedrez de contenido matemático se planteó al querer recompensar al inventor de este juego su meritorio trabajo, y pedir éste un grano de trigo para la primera casilla, dos para la segunda, cuatro para la tercera, ocho para la cuarta, y así sucesivamente, siempre doblando la cantidad. El resultado de esto es notoriamente sabido: el magnánimo rey estimó modesta aquella petición; pero, al querer satisfacerla, se encontró con que todo el trigo de la Tierra no alcanzaba a tal fin. Pues el número de granos para cada una de las casillas es, como se sabe, 2^0, 2^1, 2^2 ... 2^{63} y la suma total $2^{64} - 1$.

Lo que en cifras arroja la cantidad de:

18 446.744 073.709 551.615.

Esta leyenda reza más o menos así en muchos libros, y en el de G. Gamow, titulado *El uno, dos y tres infinitesimales.* Un historiador del ajedrez nos ha dicho que Sissa Ben Dahir le pidió a Schirham, rey de la India, granos de arroz y no de trigo. Puesto que no podemos aclarar este asunto, lo dejamos al criterio de cada uno. Como quiera que sea, ello no altera el cálculo ni el sabio ejemplo que la Historia nos ha legado.

EXPLICACION DE ALGUNAS EXPRESIONES MATEMATICAS

El producto de los n primeros números, 1, 2, 3, ... n, se representa abreviadamente por $n!$ y se lee factorial n o facultad n. Ejemplo: $4!$ representa abreviadamente el producto $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

La expresión $\binom{n}{k}$ se llama coeficiente binómico o número combinatorio; se lee n sobre k, y es la representación abreviada de

$$\frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,\ldots\,(n-k+1)}{k!}$$

en que el numerador tiene siempre tantos factores como el denominador.

En los problemas que se proponen en este libro son n y k números enteros y positivos. Si $n > k$ (léase n mayor que k), la fórmula será:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$$

Por ejemplo:

$$\binom{6}{2} = \binom{6}{4} = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15.$$

Se da el nombre de permutaciones a las coordinaciones en que todos los elementos concurran a la formación de cada grupo. Llámase número permutatorio de base n al número de permutaciones que se pueden formar con n elementos, y se indica así $n!$

Se llaman combinaciones las coordinaciones que sólo se distinguen por uno o más de los elementos que entran en cada grupo. Número combinatorio sin repetición de base n y orden k es el número de combinaciones que se pueden formar con n elementos entrando k en cada grupo, y se indica así $\binom{n}{k}$.

Y el número combinatorio con repetición se indica de esta forma $\binom{n+k-1}{k}$.

Adición sintética: el signo $\sum$ se emplea al generalizar las operaciones.

$\sum_{i=1}^{n} a_i$ significa $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$.

Ejemplo:

$$\sum_{i=3}^{5} i^2 = 3^2 + 4^2 + 5^2 = 50.$$

COLECCION ESCAQUES

1. **FINALES DE PEONES, I. Maizelis.** El tema de los finales de peones es objeto de minuciosos análisis. La obra del maestro soviético está considerada como uno de los métodos más eficaces de estudio.

2. **FINALES DE ALFIL Y DE CABALLO, Y. Averbach.** Este tipo de finales presenta dificultades que pueden llegar a frustrar la victoria cuando se carece del debido bagaje teórico. Esta obra facilita la solución del problema.

3. **TEORIA DE LOS FINALES DE TORRE, G. Löwenfisch y W. Smyslow.** Muchos maestros opinan que no existe final más complicado que el de torres. Los autores de este tratado ofrecen una eficaz norma táctica.

4-5. **TEORIA DE APERTURAS, V. N. Panov.** Un tratado muy completo, sin abstracciones ni confusiones, de la moderna teoría soviética de las aperturas. La obra completa consta de dos volúmenes.

6. **DEFENSA INDIA DE REY, P. Cherta.** Detalladísimo estudio, profundo y completo, ordenado con gran sentido lógico, sobre una de las más populares defensas modernas, tan rica en variantes y sistemas.

7-8. **TACTICA MODERNA EN AJEDREZ, L. Pachman.** Un manual moderno e inapreciable sobre la teoría y la práctica del medio juego. Facilita la comprensión de la táctica combativa. En dos volúmenes.

9. **ESTRATEGIA MODERNA EN AJEDREZ, L. Pachman.** Una obra maestra sobre el medio juego. No obstante su profundidad de juicio, el estilo sencillo de Pachman permite la comprensión rápida de las ideas.

10. **LA TRAMPA EN LA APERTURA, B. Weinstein.** El notable teórico soviético ofrece una atractiva selección de celadas y trampas, donde desfilan los peligros que supone ignorar la teoría de las aperturas.

11. **APERTURAS ABIERTAS, L. Pachman.** Un tratado serio y responsable, de alto valor teórico, indispensable para quien pretenda alcanzar un elevado nivel de juego. Las más modernas novedades teóricas.

12. **APERTURAS SEMIABIERTAS, L. Pachman.** Segunda de la serie de la obra general de Pachman «Teoría moderna en ajedrez», del mismo elevado valor que el volumen anterior y siguientes.

13. **GAMBITO DE DAMA, L. Pachman.** La naturaleza de esta popular apertura, propia del juego cerrado o de posiciones, merece los honores de un tomo especial en el profundo y extenso trabajo de Pachman.

14. **APERTURAS CERRADAS, L. Pachman.** El cuarto y último volumen de la «Teoría moderna en ajedrez», de Ludèk Pachman, pone punto final a la serie que hoy forma el más completo estudio de la teoría de las aperturas.

15. **EL ARTE DEL SACRIFICIO, R. Spielmann.** Un estudio completo del «sacrificio», de la cesión de material para ganar la partida, a través de la experiencia ajedrecística de un jugador genial.

16. **COMO DEBE JUGARSE LA APERTURA, A. Suetin.** Un ameno compendio de las reglas formales para el conocimiento de la lógica en la apertura. El autor es profesor de ajedrez en la Unión Soviética.

17. **TEORIA DE LOS FINALES DE PARTIDA, Y. Averbach.** Los conocimientos esenciales de los finales descritos por un experto. Los temas tratados contienen el material básico para elevar el nivel de juego.

18. **EL ARTE DE LA DEFENSA, I. Kan.** Guía práctica de ejercicios de defensa que contribuye a resolver los problemas de las posiciones comprometidas. Ejemplos muy bien escogidos sobre partidas reales.

19. **TACTICA DEL MEDIO JUEGO, I. Bondarewsky.** Resumido estudio sobre la técnica de combinación, celadas y sacrificios en el medio juego. Escrito en un concepto amplio, resulta útil para toda clase de jugadores.

20. **LA ESTRUCTURA DE PEONES CENTRALES, B. Persits.** Muy importante por su clara exposición e inteligentes ejemplos, este manual facilita el estudio del dominio de las casillas centrales.

21. **LA PERFECCION EN AJEDREZ, F. Reinfeld.** El destacado pedagogo norteamericano Fred Reinfeld ofrece un utilísimo método práctico para perfeccionarse en el intrincado arte ajedrecístico.

22. **EL GAMBITO DE REY, P. Keres.** El gran jugador soviético examina una de las aperturas abiertas de más solera en la historia del ajedrez, realizando una hábil selección que orienta sobre lo esencial.

23. **LECTURAS DE AJEDREZ, Y. Averbach.** Los extraordinarios estudios de Averbach sobre la teoría de los finales, es faceta muy conocida, pero este libro nos revela a un nuevo Averbach, fino humorista y brillante psicólogo.

24. **200 CELADAS DE APERTURA, E. Gelenczei.** Una hábil e ingeniosa selección de las más importantes e interesantes partidas cortas que fueron decididas mediante celadas de apertura.

25. **DEFENSA SICILIANA. Variante Najdorf, P. Cherta.** Un estudio monográfico de una de las líneas favoritas de la «Siciliana». De capital importancia en la moderna teoría del ajedrez.

26. **AJEDREZ DE ENTRENAMIENTO, A. Koblenz.** El autor, entrenador del equipo olímpico soviético, ofrece unas magistrales lecciones que revelan los llamados «secretos» de la escuela rusa moderna.

27. **JAQUE MATE, Kurt Richter.** Darse cuenta del mate, cuando se presenta, es una condición fundamental en ajedrez. Este libro se esfuerza en aguzar la mirada para la formación del mate y en estimular los sentidos para hallar la combinación que terminará por darlo.

28. **COMBINACIONES EN EL MEDIO JUEGO, P. A. Romanowsky.** El uso continuado de la combinación en el transcurso de varios siglos ha hecho posible el descubrimiento de centenares de circunstancias combinatorias en todas las posiciones, y Romanowsky ofrece un completo balance de éstas acompañándolo de abundantes ejemplos, sugerencias prácticas y diagramas.

29. **LA DEFENSA PIRC, G. Fridshtein.** Una apertura «de moda», que utilizan los grandes campeones actuales. El analista soviético Fridshtein reúne las últimas investigaciones y compendia las innumerables variantes que ofrecen los diversos sistemas y tratamientos de esta moderna línea de juego.

30. **EL SENTIDO COMUN EN AJEDREZ, Lasker.** Las famosas doce conferencias que el ex campeón del mundo dictó en Londres. Una obra clásica que continúa siendo vigente.

31. **AJEDREZ ELEMENTAL, V. N. Panov.** Un método fácil para aprender a jugar al ajedrez. En doce lecciones se ofrece un moderno curso de iniciación ajedrecística, desde el movimiento de las piezas hasta las jugadas más complicadas.

32. **ATAQUE Y DEFENSA, Hans Müller.** Un libro que muestra la relación entre el ataque y la defensa. Numerosos ejemplos y diagramas hacen que el aficionado pueda enjuiciar correctamente una posición y elaborar la estrategia y táctica a seguir.

33. **LA APERTURA CATALANA, Y. N. Neustadt.** Abarca todo el material que ha podido reunirse en más de cuarenta años de estudios sobre tan importante apertura y contiene análisis inéditos.

34. **DEFENSA SICILIANA. Variante Paulsen, P. Cherta.** El análisis exhaustivo de una de las variantes más en boga del formidable complejo «siciliano».

35. **LA PSICOLOGIA EN AJEDREZ, N. V. Krogius.** La concentración, la influencia de la propia personalidad del jugador, los grados de atención al juego, la influencia del tiempo disponible en la ejecución de cada jugada, etc., son, entre otros, los temas tratados en este libro, que ayudará al jugador a conocer lo eficiente y deficiente de su forma de juego.

36. **EL ARTE DEL ANALISIS, P. Keres.** Un libro imprescindible para el participante en los torneos ajedrecísticos. El problema de las partidas aplazadas es tratado por Keres con un método basado en sus propias experiencias.

37. **BOBBY FISCHER, P. Morán.** La peculiar biografía de Fischer junto a una acertada selección de sus partidas, desde que inició su carrera hasta su victoria en el campeonato del mundo.

38. **PARTIDAS DECISIVAS, L. Pachman.** El famoso maestro checo ha reunido en esta obra las partidas que han constituido momentos decisivos en la historia del ajedrez mundial.

39. **200 PARTIDAS ABIERTAS, D. Bronstein.** ¿Qué apertura puede ser considerada como la de mayor efectividad? Un tema que el ajedrecista se plantea y que Bronstein analiza metódicamente.

40. **EL MATCH DEL SIGLO: FISCHER-SPASSKY, L. Pachman.** El campeonato del mundo de 1972. Una completa exposición de las incidencias del match, con todas las partidas comentadas y los análisis teóricos de las aperturas utilizadas.

41. **ABC DE LAS APERTURAS, V. N. Panov.** Conociendo las reglas elementales, el primer problema que se presenta al empezar la partida es el planteamiento de la apertura. Este libro es un resumen de las ideas básicas de cada sistema de apertura y describe los conocimientos fundamentales para iniciar al ajedrecista.

42. **LA BATALLA DE LAS IDEAS EN AJEDREZ, A. Saidy.** El autor examina críticamente a diez grandes jugadores actuales con sus mejores partidas, y muestra cómo encarnan importantes ideas en el ajedrez.

43. **ATAQUES AL REY, B. F. Baranov.** Un excelente manual que relata los procedimientos y métodos de ataque y los principios estratégicos que deben guiar el asalto a la fortaleza del rey. El ataque al rey es examinado en todas las fases de la partida: apertura, medio juego y final.

44. **CAPABLANCA, V. N. Panov.** Un testimonio de incalculable valor para la historia del ajedrez. La biografía del genial cubano compuesta por Panov está considerada como una de las más logradas. Incluye setenta partidas selectas.

45. **LOS NIÑOS PRODIGIO DEL AJEDREZ, P. Morán.** La biografía crítica de seis grandes ajedrecistas que fueron considerados en su época como niños prodigio: Morphy, Capablanca, Reshevsky, Pomar, Bobby Fischer y Mecking.

46. **TABLAS, L. Verjovsky.** El autor examina los diferentes aspectos y métodos para lograr las tablas, un resultado que no disfruta de ningún honor especial, pero que, a veces, debido a la ingeniosidad de los contendientes, resulta tan honroso como una victoria. Prólogo de Miguel Tal.

47. **LEYES FUNDAMENTALES DEL AJEDREZ, Kan.** Los elementos fundamentales que condicionan la partida de ajedrez. Obra básica que instruye sobre la visión global, el correcto planteamiento y la ejecución acertada.

LEYES FUNDAMENTALES DEL AJEDREZ
Ilia Kan

En la fase principal de la lucha ajedrecista —el denominado medio juego— actúan unas leyes peculiares. Ilia Kan examina en este libro los elementos fundamentales que condicionan los problemas de la táctica y la estrategia en ajedrez.

TABLAS
L. Verjovsky

Ninguno de los autores que escriben sobre ajedrez había, hasta ahora, reunido, sistematizado y sometido a examen las partidas y finales de tablas. Este es el primer ensayo. La obra contiene un sustancioso prólogo del ex campeón del mundo Miguel Tal.

LOS NIÑOS PRODIGIO DEL AJEDREZ
Pablo Morán

Un estudio crítico de seis grandes ajedrecistas: Morphy, Capablanca, Reshevsky, Pomar, Bobby Fischer y Mecking, que fueron considerados en su época como niños prodigio.

LA DEFENSA PIRC
G. Fridshtein

El analista soviético reúne las últimas investigaciones y compendia todas las variantes de esta moderna apertura que proporciona un juego con típicas maniobras del actual pensamiento estratégico.

COLECCION

ESCAQUES